

6.6. a) $\frac{-2}{x(3x-2)}$, gdy $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$,

b) $\frac{8x+20}{x^2-16}$, gdy $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4, 4\}$,

c) $\frac{8x^2-7x+3}{x(x-1)}$, gdy $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$,

d) $\frac{-x^2-2x+1}{x(x-3)}$, gdy $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$,

e) $\frac{11x-5x^2}{x^2-4}$, gdy $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$,

f) $\frac{-4x^2+15x-4}{x^3-27}$, gdy $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$,

6.7. a) $\frac{3x^2-6x-8}{2x^2-8}$, gdy $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$,

b) $\frac{x^2-18x+12}{(x+2)(x-2)^2}$, gdy $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$,

c) $\frac{5x^2+7x-87}{x^2-25}$, gdy $x \in \mathbf{R} \setminus \{-5, 5\}$,

d) $\frac{-4x^2+14x-29}{x^3+27}$, gdy $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$.

6.8. $\frac{1}{21}$.

Wskazówka: Zauważ, że jeżeli $\frac{5a+3b}{3a} = 4$, to $\frac{b}{a} = \frac{7}{3}$, więc $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$.

Zatem $\frac{3a-b}{6b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} - \frac{1}{6}$.

6.9. a) $\frac{1}{2}$, b) $-10\frac{1}{2}$.

Wskazówka: Zauważ, że $\frac{a^2-3ab}{b^2} = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3 \cdot \frac{a}{b} = 4$. Jeśli $\frac{a}{b} = t$, to $t^2 - 3t = 4$,

skąd $t = -1$ lub $t = 4$.

a) Jeśli a i b są jednakowych znaków, to $\frac{a}{b} = 4$.

b) Jeśli a i b są różnych znaków, to $\frac{a}{b} = -1$.

6.10. -7 lub $4\frac{1}{4}$.

Wskazówka: $\frac{a^2-6b^2}{ab} = -1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{6}{\frac{a}{b}} = -1$, skąd $\frac{a}{b} = -3$ lub $\frac{a}{b} = 2$.

6.11. a) $\frac{n+2}{n}$,

b) $2(n+1)(2n+1)$,

c) $\frac{n}{n+1}$,

d) $n+1$.

Równania wymierne i ich układy oraz równania wymierne z parametrem

6.12. a) $x_0 = 1$, b) $x_0 = 0$, c) $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 0$,

d) nie ma rozwiązania, e) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 5$, f) $x_0 = \frac{1}{6}$,

g) $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$, h) $x_1 = 2\frac{5}{11}$, $x_2 = 3\frac{6}{11}$,

i) nie ma rozwiązania, j) $x_0 = 7$, k) $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Wskazówka: Wprowadź pomocniczą zmienną: j) np. $\frac{x+2}{x-4} = t$, k) $\frac{x+1}{x-1} = t$ i zauważ, że $\frac{x-1}{x+1} = t^{-1} = \frac{1}{t}$.

6.13. a) $\begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$, lub $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$, lub $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$, lub $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$.

6.14. Samochód, który zepsuł się po 6 dniach zawiózłby sam materiał budowlany w ciągu 18 dni, a drugi samochód w ciągu 22,5 dnia.

Wskazówka: Przyjmij: x – liczba dni potrzebna do zwiezenia całego materiału przez samochód, który się zepsuł, y – liczba dni dla zwiezenia całego materiału przez drugi samochód. Razem w ciągu 1 dnia oba samochody zawiozły $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ materiałów, czyli $\frac{1}{10}$ całej masy materiałów.

Po 6 dniach wspólnej pracy pozostało do przewiezienia dla drugiego samochodu $\frac{4}{10}$ masy materiałów, którą zawiózł w ciągu 9 dni, więc każdego dnia przewoził $\frac{4}{90}$ masy materiałów. Zatem $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10} \\ \frac{1}{y} = \frac{4}{90} \end{cases}$.

6.15. Bartek jechał 4,5 godziny z średnią szybkością $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a Radek jechał 3,5 godziny z średnią szybkością $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wskazówka: Przyjmij: t – czas jazdy Bartka, $t-1$ – czas jazdy Radka i $t \in (1; +\infty)$.

Średnia szybkość jazdy $v_{sr} = \frac{s}{t}$, więc $\frac{36}{t} + 4 = \frac{42}{t-1}$.

6.16. Za 1 kg jabłek zapłacono 4 zł, za 1 kg gruszek 8 zł.

Wskazówka: Przyjmij: x – cena 1 kg jabłek i $x \in \mathbf{R}^+$, $x+4$ – cena 1 kg gruszek. Wtedy $\frac{60}{x} + \frac{40}{x+4} = 20$.

6.17. a) Bransoleta lżejsza waży 15 g, a cięższa 30 g,

b) próba 0,700.

Wskazówka: a) Przyjmij: x – liczba gramów lżejszej bransolety i $x \in \mathbf{R}^+$. Wtedy $\frac{27}{2x} - \frac{10,5}{x} = 0,2$.

b) Przyjmij: y – próba srebra w lżejszej bransolecie i $y \in (0; 1)$. Wtedy $\frac{27}{y+0,200} = 2 \cdot \frac{10,5}{y}$.

6.18. Ułamki $\frac{2}{3}$ i $\frac{16}{15}$ lub $\frac{2}{5}$ i $\frac{2}{3}$.

6.19. Co najwyżej 10,5 km.

Wskazówka: $\frac{s}{v_1 + v_2} + \frac{s}{v_1 - v_2} \leq 36$, gdzie v_1 i v_2 to odpowiednio szybkość łodzi

i szybkość prądu rzeki, s – odległość od przystani.

6.20. Za drzewo brzożowe zapłacił 1000 zł i za drzewo osikowe 640 zł lub za drzewo brzożowe 1025 zł i za drzewo osikowe 615 zł.

Wskazówka: Przyjmij: x – cena zakupu drzewa brzożowego, $1640 - x$ – cena zakupu drzewa osikowego, wtedy z warunków zadania $\frac{1250 - x}{x} \cdot 100\% = \frac{(1640 - x) - 480}{1640 - x} \cdot 100\%$, czyli $x^2 - 2025x + 1\,025\,000 = 0$.

6.21. Cyfry 0 i 9.

Wskazówka: Z warunku zadania $\frac{34}{67} = \frac{3000 + 100x + 10y + 4}{6000 + 100x + 10y + 7}$, gdzie x i y oznaczają wstawione cyfry,

skąd $10x + y = 9$. Pierwiastkami tego równania jest para liczb $x = 0$ i $y = 9$.

6.22. $p \in (-\sqrt{6}; -2) \cup (2; \sqrt{6})$.

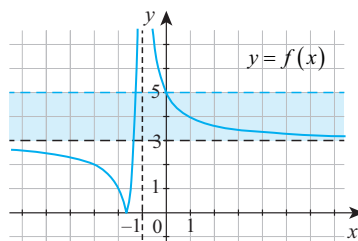
Wskazówka: Metoda graficzna: Naskicuj wykres

funkcji $y = \left| \frac{2}{x+1} + 3 \right|$. Przyjmij oznaczenia $\underbrace{\left| \frac{2}{x+1} + 3 \right|}_{f(x)} = \underbrace{p^2 - 1}_{g(x)}$.

Warunki zadania są spełnione, gdy $p^2 - 1 > 3$ i $p^2 - 1 < 5$.

Rozwiązanie **metodą analityczną** sprowadza się do rozwiązania alternatywy dwóch równań, tj.:

$$\frac{2}{x+1} + 3 = p^2 - 1 \quad \text{lub} \quad \frac{2}{x+1} + 3 = -(p^2 - 1).$$



$$6.23. \text{ a) } m \in \left(-\infty; 2\frac{9}{13}\right) \cup (3; +\infty), \quad \text{ b) } m = 2\frac{2}{3}.$$

Wskazówka: Równanie ma pierwiastki rzeczywiste, gdy $m \neq 3$ i $\Delta \geq 0$, czyli $9 + \frac{4(m-2)}{m-3} \geq 0$ i $m \neq 3$.

a) Wyznacz, dla jakich wartości parametru m suma: $x_1^3 + x_2^3 = -9$ i $\Delta \geq 0$.

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 - 3x_1 \cdot x_2) = \\ &= (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2\right], \text{ gdzie } x_1 + x_2 = -3, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{m-2}{m-3}. \end{aligned}$$

$$\text{Rozwiąż równanie: } -3 \cdot \left[(-3)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{m-2}{m-3}\right)\right] = -9.$$

$$6.24. \quad t = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia: α – kąt ostry, x_1 i x_2 – pierwiastki równania.

Warunki zadania są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ t \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad (\text{bo } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ t \neq 0 \\ \frac{1}{t^2} - 4t^2 \geq 0 \\ \left(-\frac{1}{t}\right)^2 - 2t^2 = 1 \end{cases},$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2, \quad \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ oraz } x_1 = \sin \alpha \text{ i } x_2 = \cos \alpha, \text{ więc } x_1 \in (0; 1) \text{ i } x_2 \in (0; 1)$$

6.25. $x = \frac{-3m-2}{m}$, gdy $m \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$.

Wskazówka: Po ustaleniach $x \neq m$ i $x \neq -1$ przekształć równanie $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+3}{x+1}$ do najprostszej postaci:
 $(x+2)(x+1) = (x+3)(x-m)$ i $x \neq m$ i $x \neq -1$,

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 - mx + 3x - 3m,$$

$$mx = -3m - 2 \text{ i } x \neq m \text{ i } x \neq -1.$$

1° Jeśli $m \neq 0$, to równanie liniowe $mx = -3m - 2$ ma rozwiązanie $x = \frac{-3m-2}{m}$.

Rozwiązanie to jest rozwiązaniem równania $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+3}{x+1}$,

jeżeli $\frac{-3m-2}{m} \neq m$ i $\frac{-3m-2}{m} \neq -1$ i $m \neq 0$,

$$\frac{-3m-2}{m} \neq m \text{ i } \frac{-3m-2}{m} \neq -1 \text{ i } m \neq 0,$$

$$m^2 + 3m + 2 \neq 0 \text{ i } 2m + 2 \neq 0 \text{ i } m \neq 0,$$

$$m \neq -2 \text{ i } m \neq -1 \text{ i } m \neq 0.$$

Zatem dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$ równanie $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+3}{x+1}$ ma rozwiązanie $x = \frac{-3m-2}{m}$.

2° Jeśli $m = 0$, to równanie $mx = -3m - 2$ ma postać $0 = -2$ i jest równaniem sprzecznym.

3° Jeśli $m = -2$, to równanie $mx = -3m - 2$ ma rozwiązanie $x = -2$.

Liczba ta nie jest rozwiązaniem równania $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+3}{x+1}$.

Nierówności wymierne

6.26. a) Nierówności nie są równoważne, bo mają różne dziedziny ($D_1 = \mathbf{R}$, $D_2 = \mathbf{R} \setminus \{3\}$),

b) nierówności nie są równoważne, bo mają różne dziedziny oraz zbiory rozwiązań,

c) nierówności są równoważne, bo mają identyczne dziedziny i te same zbiory rozwiązań.

- 6.27. a) $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$, b) $y \in (2; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2)$,
 d) $x \in \left(\frac{5}{7}; \frac{4}{5}\right)$, e) $y \in \left(-\infty; -\frac{9}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$, f) $x \in (-2; -1) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$,
 g) $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; 1)$, h) $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$, i) $x \in \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; 3)$,
 j) $x \in (-\infty; 1) \cup \left(2\frac{1}{5}; +\infty\right)$, k) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$,
 l) $x \in (-\infty; -11) \cup \left(-\frac{9}{7}; +\infty\right)$.

Wskazówka: i) Nierówność $\left|\frac{x}{x-2}\right| > 3$ jest równoważna alternatywie nierówności

$$\frac{x}{x-2} > 3 \quad \text{lub} \quad \frac{x}{x-2} < -3,$$

j) nierówność $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 3$ jest równoważna układowi nierówności
$$\begin{cases} \frac{x+2}{2x-3} < 3 \\ \frac{x+2}{2x-3} > -3 \end{cases},$$

l) obie strony nierówności nie są ujemne, więc nierówność możemy zapisać w postaci: $\sqrt[4]{\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^4} < \sqrt[4]{16}$,

skąd $\left|\frac{3x-1}{2x+5}\right| < 2$, czyli
$$\begin{cases} \frac{3x-1}{2x+5} < 2 \\ \frac{3x-1}{2x+5} > -2 \end{cases}.$$

- 6.28. a) $x \in (-\infty; 1)$, liczba 0, b) $x \in (-2; 2)$, liczby: 0, 1, c) $x \in (1; 6)$, liczby: 2, 3, 4, 5.

6.29. **Wskazówka:** Zauważ, że $\left|\frac{2n-10}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{-32}{3(3n+1)}\right| = \frac{32}{3(3n+1)}$, bo $n \in \mathbb{N}$.

Zatem $\frac{32}{3(3n+1)} < \frac{1}{30}$, gdy $n > 106\frac{1}{3}$.

- 6.30. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$, b) $x \in \left(-2; \frac{3}{2}\right)$, c) $x \in \left(\frac{1}{2}; 4\right)$.

6.31. a) $k \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$, b) $k \in \left(-5\frac{2}{9}; 1\right)$, c) $k \in \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$, d) $k \in (-1; 2)$.

Wskazówka: a) Nierówność postaci $ax^2 + bx + c > 0$ jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$, gdy

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a>0 \\ \Delta < 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} k^2 - 1 = 0 \\ 2(k-1) = 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} k^2 - 1 > 0 \\ 4(k-1)^2 - 8(k^2 - 1) < 0 \end{cases}, \text{ czyli}$$

$$\begin{cases} k = -1 \vee k = 1 \\ k = 1 \\ 2 > 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} k \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ k \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \end{cases}.$$

b) Nierówność postaci $ax^2 + bx + c < 0$ jest spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$, gdy $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

c) Nierówność jest spełniona, gdy licznik i mianownik będzie dodatni,

czyli gdy $4 - 8k < 0$ i $4k^2 - 7 < 0$.

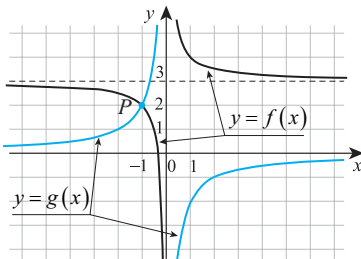
d) $\begin{cases} \frac{x^2 + kx - 2}{x^2 - x + 1} < 2 \\ \frac{x^2 + kx - 2}{x^2 - x + 1} > -3 \end{cases}$, więc $\begin{cases} \frac{x^2 + (k+2)x - 4}{x^2 - x + 1} < 0 \\ \frac{4x^2 + (k-3)x + 1}{x^2 - x + 1} > 0 \end{cases}$, skąd $\begin{cases} -x^2 + (k+2)x - 4 < 0 \\ 4x^2 + (k-3)x + 1 > 0 \end{cases}$ (bo $x^2 - x + 1 > 0$).

Zatem dana nierówność podwojona jest spełniona dla $x \in \mathbf{R}$, gdy wyróżniki Δ równań kwadratowych

$$-x^2 + (k+2)x - 4 = 0 \text{ oraz } 4x^2 + (k-3)x + 1 = 0 \text{ są ujemne, czyli, gdy } \begin{cases} (k+2)^2 - 16 < 0 \\ (k-3)^2 - 16 < 0 \end{cases}.$$

Funkcja wymierna

6.32.

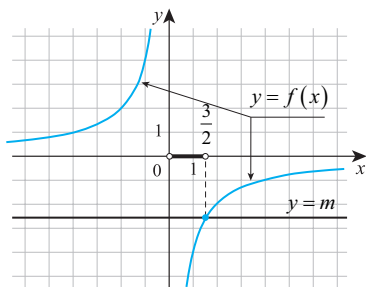


a) $P = (-1, 2)$,

b) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

6.33. $m = -\frac{8}{3}$.

Wskazówka: $m = f\left(\frac{3}{2}\right)$.



6.34. *Wskazówka:* Wystarczy pokazać, że iloczyn współrzędnych x i y punktów A , B , C ma tę samą wartość.

6.35. a) $a = 1$, $c = 1$,

b) $x \in (-2; -1)$.

Wskazówka: Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 1, więc $f(1) = 0$, skąd $a \cdot 1 - 1 = 0$. $f(0) = -1$ i $a = 1$,

więc $\frac{-1}{c} = -1$.

6.36. a) $b = 1$, $c = 2$,

b) $x_0 = -\frac{1}{2}$, $f(x) < 0$, gdy $x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

Wskazówka: Z wykresu odczytujemy, że $x \neq -2$, a z wzoru $x \neq -c$, więc $-c = -2$.

Obliczamy współczynnik b z równości $f(-3) = 5$.

Zatem $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.

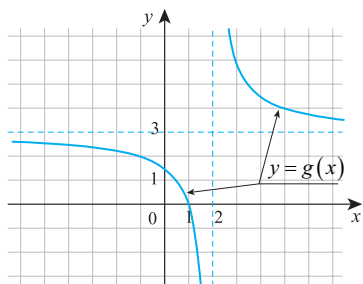
6.37. a) $a = 2$,

b) tak,

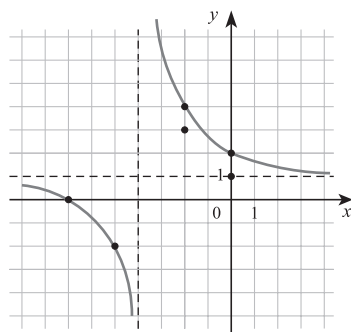
c) $m \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Wskazówka: a) $h(x) = \frac{2}{x-2} + 1$.

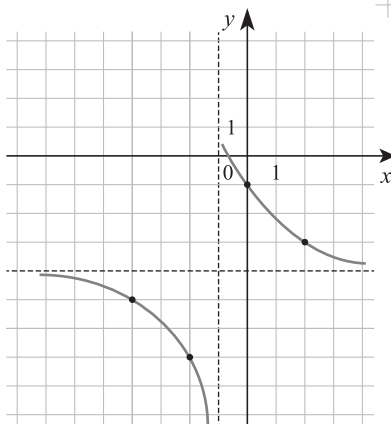
6.38. a) $g(x) = \frac{3}{x-2} + 3$,



b) $g(x) = \frac{3}{x+3} + 1$,



c) $g(x) = \frac{3}{x+1} - 4$.



6.39. $a = -4$, $x \in (-\infty; -5) \cup (-3; +\infty)$.

6.40. a) $f(x) = -\frac{3}{x} - 2$, $x=0$, $y=-2$, b) $h(x) = \frac{-3}{x-4}$, $x=4$, $y=0$, c) $f(x) = \frac{-3}{x+3} + 1$, $x=-3$, $y=1$.

6.41. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

a) $Y_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

b) $x_0 = 3$,

c) $f(0) = 6$,

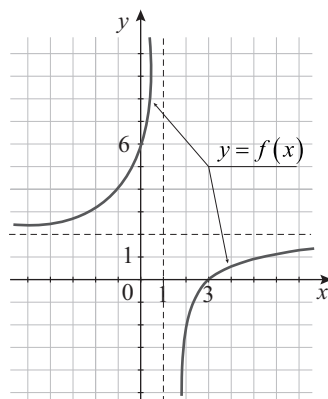
d) $f(-1) = 4$,

e) $f_{MAX} = f(-3) = 3$,

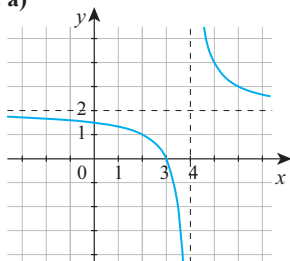
f) funkcja jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$.

Wskazówka: Wzór funkcji f zapisz w postaci

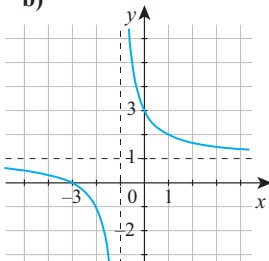
$$f(x) = \frac{2(x-1)-4}{x-1}, \text{ czyli } f(x) = \frac{-4}{x-1} + 2.$$



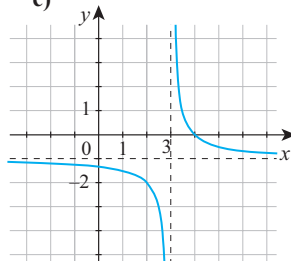
6.42. a)



b)



c)



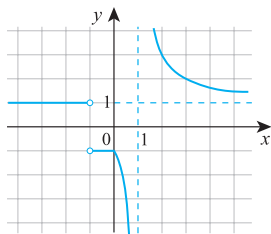
Wskazówka: a) Wykres funkcji f jest obrazem wykresu funkcji $\frac{2}{x}$ w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [4, 2]$.

Proste o równaniach $x=4$ i $y=2$ są asymptotami wykresu funkcji f ,

b) $f(x) = \frac{x+3}{x+1} = \frac{(x+1)+2}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 1$, więc równania asymptot to $x=-1$ i $y=1$,

c) $f(x) = \frac{-x+4}{x-3} = \frac{-(x-4)+2}{x-3} = -\frac{(x-3)-1}{x-3} = -\frac{-(x-3)+1}{x-3} = \frac{1}{x-3} - 1$, więc równania asymptot to $x=3$ i $y=-1$.

6.43.



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

6.44. a) $Y_f = (-\infty; -1) \cup \langle 3; +\infty)$,

b) $Y_f = (-\infty; 0) \cup \langle 20; +\infty)$,

c) $Y_f = (-\infty; 0) \cup \langle 10; +\infty)$.

Wskazówka: Aby wyznaczyć zbiór wartości Y_f funkcji f , wystarczy znaleźć zbiór tych wartości m , dla których prosta o równaniu $y=m$ ma z wykresem funkcji f co najmniej jeden punkt wspólny.

a) Należy określić dla jakich wartości m równanie $\frac{x^2-x+1}{x-1} = m$, gdzie $x \neq 1$, ma co najmniej jedno

rozwiązanie. W tym celu:

- równanie $\frac{x^2-x+1}{x-1} = m$ zapisz w postaci $x^2 - (m+1)x + m+1 = 0$,

- zapisz wyróżnik $\Delta = (m+1)^2 - 4(m+1)$ otrzymanego równania,

- rozwiąż nierówność $\Delta \geq 0$: $(m+1)^2 - 4(m+1) \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-3) \geq 0$, skąd $m \leq -1$ lub $m \geq 3$.

6.45. $x = -2$.

Wskazówka: $f\left(\frac{x+8}{x-1}\right) = \frac{x+8}{x-1}$, więc $\frac{x-8}{x-1} = x$, skąd $x = -2$ lub $x = 4$, gdzie $-2 \in A$ i $4 \notin A$.

6.46. a) $h(x) = \frac{-x^2 + 8x - 2}{(2x-1)(x+3)}$, $D_h = \mathbf{R} \setminus \left\{ -3, \frac{1}{2} \right\}$,

b) $h(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 5x - 3}$, $D_h = \mathbf{R} \setminus \left\{ -3, \frac{1}{2} \right\}$,

c) $h(x) = \frac{x^2 + 3x}{2x^2 - 5x + 2}$, $D_h = \mathbf{R} \setminus \left\{ -3, \frac{1}{2}, 2 \right\}$,

d) $h(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + 3x}$, $D_h = \mathbf{R} \setminus \left\{ -3, 0, \frac{1}{2} \right\}$.

6.47. **Wskazówka:** Wystarczy wykazać, że $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

6.48. **Wskazówka:** Należy wykazać, że prosta o równaniu $y = m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny

z wykresem funkcji f , czyli równanie $\frac{x^3}{x^2 - 1} = m$ ma co najmniej jedno rozwiązanie ($\frac{x^3}{x^2 - 1} = m$, gdy $x^3 - mx^2 + m = 0$). Równanie $x^3 - mx^2 + m = 0$ jest równaniem trzeciego stopnia, więc ma ono co najmniej jedno rozwiązanie (na podstawie twierdzenia o pierwiastkach wielomianu stopnia nieparzystego).

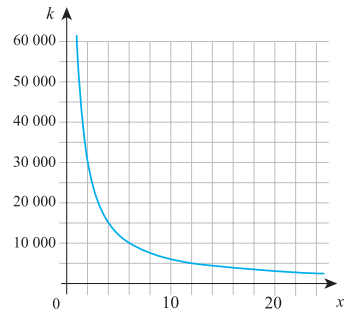
Zatem prosta o równaniu $y = m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f , a to jest warunek wystarczający na to, by zbiorem wartości funkcji f był zbiór $\mathbf{R}$.

6.49. 10 000 zł, 20 lat.

Wskazówka: Ponieważ wielkości k i x są odwrotnie proporcjonalne, więc $kx = a$, gdzie a to współczynnik proporcjonalności.

Zatem, gdy $x > 0$ mamy $k(x) = \frac{a}{x}$. Z warunków zadania

$k(2) = 30\,000$, skąd $a = 60\,000$, zatem $k(x) = \frac{60\,000}{x}$.



6.50. Wskazówka:

Z (założenie): $x_1 \in (-1; +\infty)$, $x_2 \in (-1; +\infty)$ i $x_1 < x_2$, czyli $x_1 - x_2 < 0$.

T (teza): $f(x_1) < f(x_2)$, czyli $f(x_1) - f(x_2) < 0$.

Dowód:

I sposób (wykorzystanie definicji)

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{3x_1}{x_1 + 1} - \frac{3x_2}{x_2 + 1} = \frac{3x_1(x_2 + 1) - 3x_2(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{3(x_1 - x_2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}.$$

Z założenia: $x_1 < x_2$, czyli $x_1 - x_2 < 0$ oraz $x_1 + 1 > 0$ i $x_2 + 1 > 0$, bo $x_1, x_2 \in (-1; +\infty)$, więc iloraz

$$\frac{3(x_1 - x_2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \text{ jest ujemny, czyli } f(x_1) - f(x_2) < 0, \text{ skąd } f(x_1) < f(x_2). \quad \text{cnd.}$$

II sposób (wykorzystanie rachunku różniczkowego)

$$f'(x) = \frac{(3x)' \cdot (x+1) - 3x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}, \text{ gdy } x \in (-1; +\infty).$$

Funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(-1; +\infty)$, a jej pochodna jest w każdym punkcie tego przedziału dodatnia. Zatem funkcja f jest rosnąca w tym przedziale. cnd.

III sposób (wykorzystanie własności funkcji $g(x) = \frac{a}{x}$)

$$f(x) = \frac{3x}{x+1} = \frac{3(x+1)-3}{x+1} = \frac{-3}{x+1} + 3.$$

Wykres funkcji f można uzyskać przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{-3}{x}$, gdy $x \in (0; +\infty)$

o wektor $[-1, 3]$. Z wykresu funkcji g wynika, że jest rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$, więc funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-1; +\infty)$. cnd.

IV sposób (wykorzystanie umiejętności porównywania ułamków)

$$f(x) = \frac{3x}{x+1} = \frac{3x+3-3}{x+1} = \frac{3(x+1)-3}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}.$$

Ułamek $\frac{3}{x+1}$, gdy $x \in (-1; +\infty)$ jest dodatni. Jest on tym mniejszy, im jego mianownik jest większy.

Ze wzrostem liczby $x > -1$ liczba $3 - \frac{3}{x+1}$ jest coraz większa. Zatem funkcja f jest rosnąca. cnd.

6.51. Wskazówka:

Z (założenie): $x_1 \in (-4; +\infty)$, $x_2 \in (-4; +\infty)$ i $x_1 < x_2$.

T (teza): $f(x_1) > f(x_2)$.

Przeprowadź dowód stosując jedną z metod z zadania 6.50..

6.52. *Wskazówka:*

$$f(x) = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{\frac{\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} - \frac{\sqrt{x+1}-1}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{2}{\frac{\sqrt{x+1}+1}{x+1-1} - \frac{\sqrt{x+1}-1}{x+1-1}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{\frac{\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2x}{2} \cdot \frac{1}{x^2}.$$

6.53. 50 godzin.

Wskazówka: $75 \cdot 4 = t \cdot 6$, gdzie t to czas pracy 6 spychaczy.

6.54. 640 obrotów.

Wskazówka: $50 \cdot 256 = 20 \cdot x$, gdzie x to liczba obrotów mniejszego koła.

6.55. a) 4 dni, b) 18 turystów.

6.56. 400 Hz.

6.57. a) $k=10$, współczynnik: 60, b) $k=-\frac{4}{3}$, współczynnik: -20 , c) $k=1$, współczynnik: 80.

6.58. Czas pracy wydłuży się o 4 godziny.

Wskazówka: Liczba godzin potrzebnych na wykonanie zadania przez 18 robotników: $18 \cdot 12 = 216$. Liczba godzin pozostałych po odejściu 8 robotników: $216 - 7 \cdot 18 = 90$.

Liczba godzin potrzebnych do wykonania pozostałej pracy przez 10 robotników: $90 : 10 = 9$. Zatem czas wykonywania zadania to 16 godzin ($7 \text{ h} + 9 \text{ h}$).

6.59. Długość: $0,1 - 0,3$, średnie: $0,3 - 3$, krótkie: $3 - 30$, ultrakrótkie: $30 - 1000$.

Wskazówka: 1 MHz (megaherc) $= 10^6$ Hz (hertzów).

6.60 a) $s = 120 \text{ km}$, b) 8 h.