

8. Wielomian – odpowiedzi i wskazówki

Wielomian i jego własności

8.1. 1 a) $D = \left\langle -\frac{3}{2}; 4 \right\rangle$, $ZW = Y = \langle -3; 4 \rangle$,

b) $\left\langle -\frac{3}{2}; 0 \right\rangle$, $\langle 2; 4 \rangle$,

c) $x \in \left\langle -\frac{3}{2}; -1 \right\rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$,

d) $y_{MAX} = f(4) = 4$,

e) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$,

f) $y_{MIN} = h\left(\frac{3}{2}\right) = -1$.

2 a) $D = \langle -6; 6 \rangle$, $ZW = Y = \langle -4; 2 \rangle$,

b) $\langle -3; 0 \rangle$, $\langle 3; 6 \rangle$,

c) $x \in \langle -5; -1 \rangle \cup \langle 1; 5 \rangle$,

d) $y_{MAX} = f(0) = 1$,

e) $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 6$,

f) $y_{MIN} = h(-3) = h(3) = -2$.

8.2. $m = -8$, $n = -23$.

Wskazówka: $Q(x) - 2P(x) = x^4 - 12x^3 + 40x^2 - 38x - 3$.

8.3. a) $m = 7$, $W(x) = x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 43x + 21$,

b) $m = 4$, $W(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 10x + 12$,

c) $m = \sqrt{6}$ lub $m = -\sqrt{6}$, $W(x) = x^4 + (\sqrt{6} - 2)x^3 + (3 - \sqrt{6})x^2 + 3\sqrt{6}$,

$W(x) = x^4 + (-\sqrt{6} - 2)x^3 + (3 + \sqrt{6})x^2 - 3\sqrt{6}$.

Wskazówka: $W(x) = x^4 + (m - 2)x^3 + (3 - m)x^2 + (m^2 - 6)x + 3m$.

a) $m - 2 = 5$,

b) $3 - m = -1$,

c) $m^2 - 6 = 0$.

8.4. a) Nie, bo st. $[W(x)] = 6000$ i st. $[G(x)] = 4000$, b) st. $[Q(x)] = 2000$.

Wskazówka: Zauważ, że $W(x) = (x - 1)^{2000}(x + 1)^{4000}$ i $G(x) = (x + 1)^{4000}$.

8.5. $p = \frac{7}{6}$.

8.6. a) $a = -3$, $b = -1$, $c = 15$,

b) $W(x) = x(x + 4 + \sqrt{5})(x + 4 - \sqrt{5})$.

8.7. $a_2 = -4$, $a_1 = 2$, $a_0 = 0$.

Wskazówka: $W(x) = 2x(x - 1)^2 = 2x^3 - 4x^2 + 2x$.

8.8. *Wskazówka:* $f(0) = 90$ i $f(x) = a(x + 6)(x + 5)(x + 3)$, skąd $a = 1$ i $f(x) = x^3 + 14x^2 + 63x + 90$.

8.9. a) Tak, b) $W(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)$, $P(x) = (x+3)^2 \cdot (x-2)$, c) $Q(x) = (1-x)(2x+5)(x-2)$.

8.10. a) $m = 23$, $R = 0$,

b) $m = 2$, $R = 112$.

8.11. $m = -6$.

Wskazówka: Rozwiąż równanie $W(3) = 0$.

8.12. $k = 2$ i $m = 1$.

Wskazówka: Rozwiąż układ równań $\begin{cases} W(1) = 0 \\ W(3) = 0 \end{cases}$.

8.13. $a = \frac{1}{2}$; $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.

8.14. a) $k = 3$,

b) $k_1 = -8$, $k_2 = 8$.

Wskazówka: a) $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, czyli $x^3 + 2x^2 - kx + 3 = (x-1) \cdot Q(x) + 3$. Gdy $x = 1$,

to $1 + 2 - k + 3 = (1-1) \cdot Q(1) + 3$.

8.15. $a = -5$ i $b = 9$.

Wskazówka: Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} W(2) = 7 \\ W(3) = 10 \end{cases}$.

8.16. $x \in \left(0; \frac{8}{3}\right)$.

Wskazówka: Rozwiązując układ równań $\begin{cases} W(-1) = 0 \\ W(2) = 0 \end{cases}$ obliczysz współczynniki $a = -4$

i $b = 1$. Nierówność $W(x-1) > W(x+1) - 4$ jest równoważna nierówności

$$x^3 - 7x^2 + 12x > x^3 - x^2 - 4x + 4 - 4.$$

8.17. **Wskazówka:** Zauważ, że $W(2) = (2-2)^{2m} + (2-1)^m - 1 = 1 - 1 = 0$,

$$W(1) = (1-2)^{2m} + (1-1)^m - 1 = 1 - 1 = 0.$$

8.18. $x = \frac{\sqrt{19} - 2}{3}$.

Wskazówka: Funkcja f ma trzy miejsca zerowe -3 , -1 i 2 . Funkcję tę możesz zapisać w postaci:

$$f(x) = 1 \cdot (x+3)(x+1)(x-2), \text{ czyli } f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6, \text{ skąd } b = 2, c = -5, d = -6.$$

$$f'(x) = 0, \text{ gdy } 3x^2 + 4x - 5 = 0, \text{ skąd } x_1 = \frac{-2 + \sqrt{19}}{3} \text{ i } x_2 = \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}.$$

$$f_{\min} = f\left(\frac{\sqrt{19} - 2}{3}\right) = -\frac{1}{27}(56 + 38\sqrt{19}).$$

8.19. a) $f(x) = \frac{2}{5}x(x+2)(x-4)$,

b) przesunąć wykres funkcji f o wektor $[3, 2]$.

8.20. a) $D_f = \langle -2; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$,

b) $D_f = \langle -4; +\infty \rangle$,

c) $D_f = \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$,

d) $D_f = \langle -1; 1 \rangle$.

8.21. $a = 4$, $b = -2$.

8.22. a) $W(x) = (x+7)(x+1)(x-1)$,

b) $W(x) = (2x+1)(x+2)(x-2)$,

c) $W(x) = (x^2 - x + 1)(x+1)(2x-3)$.

8.23. a) Tak, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $W(x) = (x+3)(x+2)(x-1)$,

b) liczba 1 nie jest pierwiastkiem,

c) tak, $x = 3$, $W(x) = (x-2)^2(x-3)$,

d) tak, $x_1 = -5$, $x_2 = 4$, $W(x) = (x+5)(x+1)(x-4)$.

Wskazówka: Zauważ, że $W(-3) = 0$, więc liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu W .

Na mocy twierdzenia Bezouta wielomian W dzieli się przez dwumian $x+3$.

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 2 \\ (x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x+3) \\ \hline -x^3 - 3x^2 \\ \hline x^2 + x \\ \hline -x^2 - 3x \\ \hline -2x - 6 \\ \hline 2x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Wielomian W można zapisać w postaci $W(x) = (x+3)(x^2 + x - 2) = (x+3)(x+2)(x-1)$.

8.24. **Wskazówka:** $[(x+1)(x+4)] \cdot [(x+2)(x+3)] + 1 = [(x^2 + 5x) + 4] \cdot [(x^2 + 5x) + 6] + 1 =$
 $= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24 + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2.$

8.25. **Wskazówka:** $(x^4 - 2x^3 + x^2) + (x^2 - 8x + 16) = x^2(x-1)^2 + (x-4)^2.$

8.26. **Wskazówka:** Wykaż, że $W(1) = 1$.

8.27. **Wskazówka:** **Założenie:** Wielomian W jest podzielny przez dwumian $x+1$, więc $W(-1) = 0$.

Teza: $a_0 + a_2 + a_4 + \dots = a_1 + a_3 + a_5 + \dots$

Dowód: Z warunku $W(-1) = 0$ otrzymujesz równość $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n = 0$, skąd

$a_0 + a_2 + a_4 + \dots = a_1 + a_3 + a_5 + \dots$ **cnw.**

8.28. Wskazówka: $xyx + yxy$, to $100x + 10y + x + 100y + 10x + y = 111x + 111y = 111(x + y)$.

Równania wielomianowe

8.29. a) $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$,

b) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$,

c) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$,

d) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$,

e) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{3}$,

f) $x_1 = -\frac{7}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$.

Wskazówka: Zapisz równanie w postaci:

a) $(x^2 - 3)(3x - 2) = 0$,

b) $x(x^2 - 6x + 5) = 0$,

c) $(x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$, ponieważ liczba 1 jest pierwiastkiem równania

i $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6):(x - 1) = x^2 - x - 6$,

d) $(x^3)^2 - 7x^3 - 8 = 0$ i wprowadź pomocniczą zmienną np. $x^3 = t$ i rozwiąż równanie $t^2 - 7t - 8 = 0$,

gdzie $t = -1$ lub $t = 8$, skąd $x^3 = -1$ lub $x^3 = 8$,

e) $3x^3 + 8x^2 + 3x - 2 = 0$ i zauważ, że liczba -1 jest pierwiastkiem tego równania,

f) $(2x + 5)(x + 1)(x - 5) = 5(x - 5) \Leftrightarrow (x - 5)((2x + 5)(x + 1) - 5) = 0$.

8.30. a) $x_1 = -8$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$,

b) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$,

c) $x_0 = 1$,

d) $x_1 = -5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

Wskazówka: **a)** Skorzystaj z własności wartości bezwzględnej i zapisz równanie:

$(x + 2)^2 - 18 = 18$ lub $(x + 2)^2 - 18 = -18$, a następnie je rozwiąż,

b) $|(x - 1)^3| = (x - 1)^2 \Leftrightarrow |(x - 1)^2 \cdot (x - 1)| = (x - 1)^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \cdot |x - 1| - (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 (|x - 1| - 1) = 0$,

c) opuść wartość bezwzględną i zapisz:

$x^3 \cdot x + 8x = 0$, gdy $x \geq 0$ lub $x^3 \cdot (-x) + 8x = 0$, gdy $x < 0$,

więc $x(x^3 + 8) = 0$, gdy $x \geq 0$ lub $x(-x^3 + 8) = 0$, gdy $x < 0$,

czyli $x = 0$ lub $x = -2$, gdy $x \geq 0$ lub $x = 0$ lub $x = 2$, gdy $x < 0$,

skąd $x = 0$.

d) zapisz równanie w postaci $x^4 + 5 = |x| \cdot (5x^2 + 1)$ i rozwiąż równania:

$x^4 + 5 = x(5x^2 + 1)$, gdy $x \geq 0$ lub $x^4 + 5 = -x(5x^2 + 1)$, gdy $x < 0$.

8.31. a) $n = 17$, b) $n = 4$, c) $n = 3$.

Wskazówka: a) $\binom{n}{3} = 5 \cdot \binom{n}{2} \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 15n(n-1) \Leftrightarrow n(n-1)(n-2-15) = 0$,

skąd $n = 0$ lub $n = 1$ lub $n = 17$ i $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 3$,

b) $n + n(n-1)(n-2) = 28 \Leftrightarrow n^3 - 3n^2 + 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow (n-4)(n^2 + n + 7) = 0$ i $n \in \mathbb{N}$, i $n \geq 3$,

c) $(n-2)(n-1)n + (n-1)n(n+1) = 30 \Leftrightarrow n(n-1)[n-2+n+1] = 30 \Leftrightarrow n(n-1)(2n-1) = 30$.

I sposób.

Gdy $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 3$. Zauważ, że $30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$, skąd $n = 3$.

II sposób.

$2n^3 - 3n^2 + n - 30 = 0$ i zauważ, że liczba 3 jest pierwiastkiem tego równania,

czyli $(n-3)(2n^2 - 3n + 10) = 0$ i $n \in \mathbb{N}$, i $n \geq 3$.

8.32. **Wskazówka:** Zauważ, że równanie może mieć pierwiastki: $-3, -1, 1, 3$. Wykaż, że żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem równania.

8.33. **Wskazówka:** $a = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$. $W(x) = x(4x^2 - 8x + 1)$ i $x_1 = a$, $x_2 = b$.

8.34. Liczby 3, 4 i 5.

Wskazówka: Przyjmij: x – pierwsza liczba, $x+1$ – druga liczba, $x+2$ – trzecia liczba.

Zatem $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = 216$.

8.35. $m \in \{-\sqrt{14}, \sqrt{14}\}$.

Wskazówka: Z warunków zadania: $\Delta > 0$ i $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$, gdzie $\Delta = m^2 - 12$

i $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] - 2 \cdot (x_1x_2)^2$ oraz $x_1 + x_2 = m + 2$, $x_1x_2 = m + 4$.

Rozwiąż układ
$$\begin{cases} m^2 - 12 > 0 \\ m^4 - 12m^2 - 28 = 0 \end{cases}$$
.

8.36. $m \in (-\infty; -6) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$.

Wskazówka: Równanie można zapisać w postaci: $x[m^2x^2 + (m^2 + 6m)x + m + 6] = 0$,

skąd $x = 0$ lub $\otimes m^2x^2 + (m^2 + 6m)x + m + 6 = 0$.

Ponieważ jednym z pierwiastków równania jest liczba 0, więc równanie będzie miało trzy różne pierwiastki, gdy równanie $\otimes$ ma dwa różne pierwiastki i żaden z nich nie jest równy 0, a to jest spełnione, gdy:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ c \neq 0, \text{ czyli} \\ \Delta > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m^2 \neq 0 \\ m + 6 \neq 0 \\ (m^2 + 6m)^2 - 4m^2(m + 6) > 0 \end{cases}.$$

8.37. Nie ma takiej wartości parametru m , dla której równanie ma trzy różne pierwiastki niedodatnie.

Wskazówka: $x^3 - 2(m+1)x^2 + (2m^2 + 3m + 1)x = 0 \Leftrightarrow x[x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 3m + 1] = 0$.

$$\text{Zatem } \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}.$$

8.38. $m \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

Wskazówka: Lewa strona równania $(x-5)[(m-1)x^2 - 2mx + m-2] = 0$ jest podzielna przez dwumian

$x-5$, więc liczba 5 jest pierwiastkiem dodatnim równania. Pozostałe dwa pierwiastki muszą być ujemne.

Równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1 i x_2 ujemne, gdy spełnione są warunki:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ 12m-8 > 0 \\ \frac{m-2}{m-1} > 0 \\ \frac{2m}{m-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{2}{3} \\ m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \\ m \in (0; 1) \end{cases}.$$

8.39. $p \in \left(\frac{3}{4}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

Wskazówka: Dane równanie można przedstawić w postaci

$$x^3 - px + p - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 1) - p(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)[(x^2 + x + 1) - p] = 0.$$

Zatem $x - 1 = 0$ lub $x^2 + x + 1 - p = 0$. Rozwiązaniem pierwszego równania jest liczba 1, więc drugie równanie powinno mieć dwa rozwiązania różne od 1, czyli $\Delta > 0$ i $1^2 + 1 + 1 - p \neq 0$.

8.40. $m \in (2; +\infty)$.

Wskazówka: Jeżeli $x^2 = t$ i $t > 0$, to dane równanie możesz zapisać w postaci

$$\otimes (m-2)t^2 - 2(m+3)t + m+1 = 0.$$

Dane równanie ma cztery różne rozwiązania tylko wtedy, gdy równanie $\otimes$ ma dwa różne pierwiastki

dodatnie. Dla równania $\otimes$ powyższe warunki są spełnione, gdy

$$\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} m \neq 2 \\ 4(7m+11) > 0 \\ \frac{2(m+3)}{m-2} > 0 \\ \frac{m+1}{m-2} > 0 \end{cases}.$$

8.41. $p \in \left(1; \frac{5}{4}\right)$.

Wskazówka: $x^5 + (1-2p)x^3 + (p^2-1)x = 0 \Leftrightarrow x[x^4 + (1-2p)x^2 + p^2-1] = 0$,

więc $x_1 = 0$ lub $x^4 + (1-2p)x^2 + p^2-1 = 0$. Podstaw do równania dwukwadratowego $x^2 = t$ ($t > 0$)

otrzymasz równanie równoważne $t^2 + (1-2p)t + p^2-1 = 0$. Aby równanie dwukwadratowe z niewiadomą x miało cztery różne pierwiastki x_2, x_3, x_4, x_5 różne od zera, to równanie kwadratowe z niewiadomą t musi

mieć dwa różne pierwiastki dodatnie, czyli $t_1 > 0, t_2 > 0$.
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2p)^2 - 4(p^2-1) > 0 \\ \frac{2p-1}{1} > 0 \\ \frac{p^2-1}{1} > 0 \end{cases}.$$

Nierówności wielomianowe

8.42. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; 5)$.

Wskazówka: Rozwiązanie danej nierówności sprowadza się do ustalenia przedziałów liczbowych,

w których wielomian $W(x) = -x^3 + 5x^2 + 9x - 45$ przyjmuje wartości dodatnie.

1° $W(x) = 0$, gdy

$$-x^3 + 5x^2 + 9x - 45 = 0$$

$$(-x^3 + 5x^2) + (9x - 45) = 0$$

$$-x^2(x-5) + 9(x-5) = 0$$

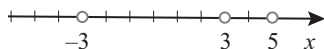
$$(x-5)(9-x^2) = 0$$

$$(x-5)(3-x)(3+x) = 0$$

$$x = 5 \text{ lub } x = 3 \text{ lub } x = -3.$$

2° Miejsca zerowe wielomianu $W(x)$: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, dzielą zbiór $\mathbf{R}$ na przedziały:

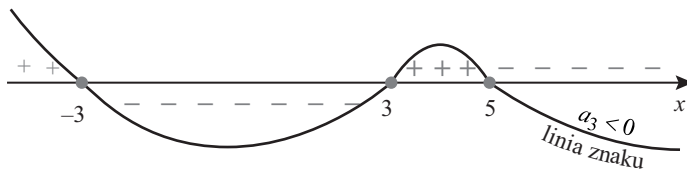
$$(-\infty; -3), (-3; 3), (3; 5), (5; +\infty)$$



3° Na osi liczbowej zaznacz miejsca zerowe i znak wartości wielomianu $W(x)$ w przedziale $(-\infty; -3)$.

Znaki wartości $W(x)$ w kolejnych przedziałach na osi liczbowej wyznacz, rysując linię znaku $W(x)$,

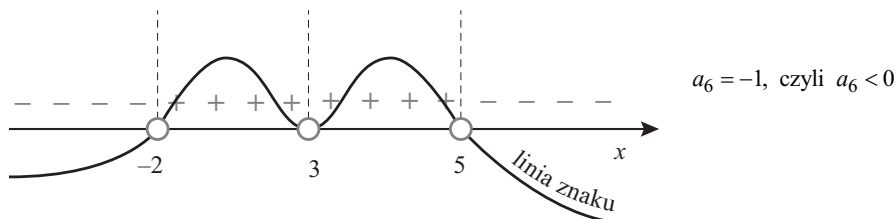
gdy $a_3 = -1$.

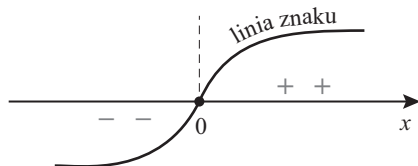
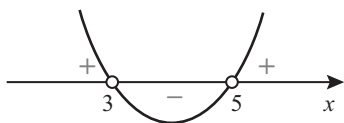
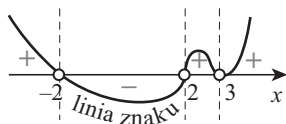
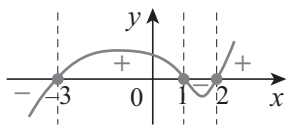
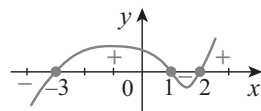


Nierówność $-x^3 + 5x^2 + 9x - 45 > 0$ jest prawdziwa dla $x \in (-\infty; -3) \cup (3; 5)$.

8.42. b) $x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$.

Wskazówka:



8.42. c) $x \in \langle 0; +\infty \rangle$.**Wskazówka:** $x^3(2x^4 + 3x^3 + 2) \geq 2 \Leftrightarrow x^3 \geq 0$, bo $2x^4 + 3x^3 + 2 \geq 0$, gdy $x \in \mathbf{R}$, $a_7 = 2$, czyli $a_7 > 0$,8.42. d) $x \in (3; 5)$.**Wskazówka:** Zauważ, $-2x^2 - 3x - 8 < 0$ że, więc nierówność będzie spełniona, gdy $x^2 - 8x + 15 < 0$. $a_2 = 1$, czyli $a_2 > 0$,8.42. e) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.**Wskazówka:** $(x^2 - 4)(x^2 - 6x + 9) > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)(x-3)^2 > 0$, gdzie $(x-3)^2 > 0$, gdy $x \neq 3$, $a_4 = 1$, czyli $a_4 > 0$,8.42. f) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 1; 2 \rangle$.**Wskazówka:** $x^3 - 7x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 6x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 6(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-1)[x(x+1) - 6] \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x-2) \leq 0$. $a_3 = 1$, czyli $a_3 > 0$.8.43. a) $x \in \{-2, -1, 1\}$,b) $x \in (-\infty; 1)$,c) $x \in \langle -3; 4 \rangle$.**Wskazówka:**a) Zauważ, że $|(x-1)(x+1)(x+2)| \leq 0 \Leftrightarrow |(x-1)(x+1)(x+2)| = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+2) = 0$,b) rozpatrz dwa przypadki: $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq x^3 - x \end{cases}$ lub $\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ -x^2 + 1 \geq x^3 - x \end{cases}$,c) $|x^2 - x| \leq 12$, więc $x^2 - x \leq 12$ i $x^2 - x \geq -12$.

8.44. a) Brak rozwiązania, b) $n \in \{2, 3\}$.

Wskazówka: Nierówność zapisz w postaci: a) $n^2 - 4 < 0$ i $n \in \mathbb{N}$ oraz $n \geq 2$,

b) $n^2 - n - 8 \leq 0$ i $n \in \mathbb{N}$ oraz $n \geq 2$.

W przedziale $\left(\frac{1-\sqrt{33}}{2}; \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)$ znajdują się dwie liczby naturalne większe od 1.

8.45. **Wskazówka:** Lewą stronę nierówności można zapisać w postaci:

a) $(x^2 - 1)^2 + (x+1)^2 + 2$,

b) $(x^4 - 6x^2 + 9) + (x^2 + 4x + 4) + 1$, czyli $(x^2 - 3)^2 + (x+2)^2 + 1$,

c) $(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + (x^2 + 4x + 4)$, czyli $x^2(x-2)^2 + (x+2)^2$,

d) $x^3 - 2x - 2 = x^3 \underbrace{-2x^2 + 2x^2}_{0} \underbrace{-4x + 2x}_{-2x} - 2 = x^2(x-2) + 2x(x-2) + (x-2+x) =$
 $= (x-2)(x^2 + 2x + 1) + x = (x-2)(x+1)^2 + x$.

Gdy $x > 2$, to $(x-2)(x+1)^2 > 0$ i $x > 2$, więc $(x-2)(x+1)^2 + x > 0$. **cnw.**

8.46. a) $x \in \left(-\infty; 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}; +\infty\right)$, b) $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Wskazówka: b) Rozwiąż nierówność $3x^2 + 9 > 12x$, czyli $x^2 - 4x + 3 > 0$.

8.47. **Wskazówka:**

Zapisz nierówność $n^2 > \binom{n+2}{2}$ w postaci $-n^2 + 3n + 2 < 0$ i podaj rozwiązanie w zbiorze liczb naturalnych większych od 3.

8.48. **Wskazówka:**

Zapisz nierówność $\binom{2n}{n} > 2 \cdot \binom{n}{1}$ w postaci $2n(2n-3) > 0$ i podaj rozwiązanie w zbiorze liczb naturalnych większych od 1