

10. Trygonometria – odpowiedzi i wskazówki

Obliczenia trygonometryczne

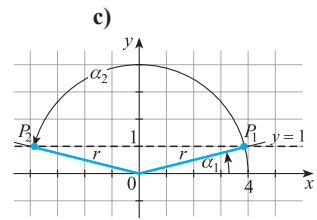
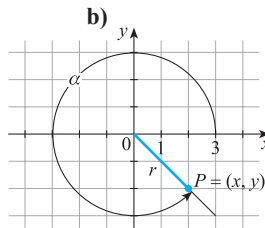
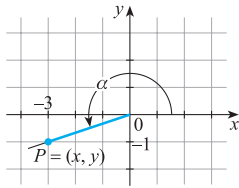
10.1.	Miara kąta w stopniach	15°	$22,5^\circ$	120°	200°	260°	300°	225°
	Miara kąta w radianach	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{10}{9}\pi$	$\frac{13}{9}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$

10.2. a) $-\frac{51}{20}$, b) $\frac{64}{225}$.

Wskazówka: a) $P = (4, -3)$, $r = |OP| = 5$, $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, więc $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$.

10.3. $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

10.4. a)



Wskazówka: a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ i $\alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$, więc ramię końcowe kąta α leży w III ćwiartce układu

współrzędnych i obie współrzędne punktu P są ujemne, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, więc np. $x = -3$ i $y = -1$,

skąd $P = (-3, -1)$.

b) $\frac{3}{2}\cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \frac{3}{2}\cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$. Z warunku zadania ramię końcowe kąta α leży

w IV ćwiartce układu współrzędnych, $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ i $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, więc np. $x = 2$ i $r = 3$.

c) $4\sin \alpha = 1$, więc $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Z warunku zadania ramię końcowe kąta leży w I ćwiartce układu współrzęd-

nych (kąt α_1) lub w II ćwiartce (kąt α_2). $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ i $\sin \alpha = \frac{y}{r}$, więc np. $y = 1$, $r = 4$.

$$10.5. \text{ a) } \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4},$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \frac{-3\sqrt{10}}{10}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{c) } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$\text{d) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad \text{lub} \quad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{30}}{6}, \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\text{e) } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{23}}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{46}}{23} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{23}}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{46}}{23},$$

$$\text{f) } \sin \alpha = \frac{1}{4}, \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

Wskazówka: a) Skorzystaj z wzoru $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, otrzymasz $\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$,

czyli $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ lub $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Ponieważ $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, więc $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

$$\text{b) Rozwiąż układ równań } \begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -3 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -3 \cos \alpha \\ (-3 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases},$$

$$\text{skąd } \begin{cases} \sin \alpha = -3 \cos \alpha \\ \cos \alpha = \frac{-\sqrt{10}}{10} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \sin \alpha = -3 \cos \alpha \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \end{cases}.$$

Ponieważ $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$, więc $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ i $\sin \alpha = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$.

$$\text{d) Rozwiąż układ równań } \begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{5} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{5} \cos \alpha \\ (\sqrt{5} \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{5} \cos \alpha \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

$$\text{lub } \begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{5} \cos \alpha \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6} \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{30}}{6} \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}.$$

$$10.6. \text{ a) } y = 1,$$

$$\text{b) } y = -\sqrt{3}.$$

$$10.7. \text{ a) } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad \cos \alpha = \frac{-\sqrt{10}}{10}.$$

Wskazówka: a) Z warunków zadania: $\operatorname{tg} \alpha = 2$ i $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, więc $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$.

$$\text{Rozwiąż układ równań } \begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} \sin \alpha = 2 \cos \alpha \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \sin \alpha = 2 \cos \alpha \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

$$\text{b) } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \text{ więc } \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}.$$

10.8. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$, c) $\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$,
 d) $\frac{4\sqrt{3}-9\sqrt{2}-3}{6}$, e) $\frac{-4\sqrt{3}+9\sqrt{2}-9}{6}$, f) 2.

Wskazówka: a) $\cos^2 105^\circ - \sin^2 105^\circ = \cos(2 \cdot 105^\circ) = \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ$.

b) $\cos(-390^\circ) - \operatorname{tg} 135^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) - \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = \cos 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$.

e) Wyrażenie zapisz w postaci $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 3\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ i zastosuj wzory redukcyjne.

10.9. a) 1, b) $\frac{\sqrt{6}}{8}$, c) 1,
 d) 0, e) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$, f) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$.

10.10. $\frac{\pi}{3}$.

Wskazówka: $\operatorname{tg} \alpha = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}$, więc $\alpha = 60^\circ$.

10.11. a) $\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$, b) 2, c) $5-\sqrt{3}$, d) $-\frac{2}{3}$, e) 8.

Wskazówka: c) Zapisz wyrażenie w postaci $4 - \sqrt{3}(\sin^2 17^\circ + \cos^2 17^\circ) + \operatorname{tg} 50^\circ \frac{1}{\operatorname{tg} 50^\circ}$ i oblicz.

d) $\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$.

e) Wyrażenie sprowadź do wspólnego mianownika i otrzymasz $\frac{4}{4(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = \frac{4}{(\sin 2\alpha)^2}$.

10.12. a) 1, b) $-\frac{12}{7}$, c) -1, d) $\frac{5}{4}$.

Wskazówka: a) $\frac{3\sin \alpha - 4\cos \alpha}{\sin \alpha + 2\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha \left(3\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{4\cos \alpha}{\cos \alpha}\right)}{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}\right)} = \frac{3 \cdot 3 - 4}{3 + 2} = 1$.

10.13. a) $\frac{13}{18}$, b) $\frac{7}{12}$.

Wskazówka:

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2$.

b) Stosując wzór skróconego mnożenia $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, otrzymasz

$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha)$, a następnie wyrażenie $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ zapisz w postaci $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

10.14. $\sqrt{2}$.

10.15. $c^2 - 1$.

Wskazówka: Ponieważ $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, więc $c > 0$. Podnieś do kwadratu obie strony równości

$$\sin \alpha + \cos \alpha = c \text{ i otrzymasz } \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = c^2, \text{ czyli } 1 + \sin 2\alpha = c^2.$$

10.16. a) $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$, b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

10.17. a) $3 - \sqrt{3}$, b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Wskazówka: a) $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, więc $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$, b) $\frac{7}{12}\pi = \frac{3}{12}\pi + \frac{4}{12}\pi$, oraz $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$.

10.18. $\frac{1}{2}$.

Wskazówka: $\sin \alpha \sin \beta = \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$. Jeśli $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, to $\frac{1}{2} \sin 2\alpha \leq \frac{1}{2}$.

10.19. a) $\frac{2}{9}(1 - \sqrt{10})$, b) $\frac{3\sqrt{15} - \sqrt{7}}{16}$, c) $-\frac{17\sqrt{2}}{26}$, d) $\frac{4\sqrt{6} - 25}{23}$.

10.20. a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$, c) $2 + \sqrt{3}$, d) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$,
e) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$.

Wskazówka: a), b) Skorzystaj z wzorów: $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$.

c) $\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ)$, oraz $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$.

10.21. **Wskazówka:** $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg}(-148^\circ) \cdot \operatorname{tg} 238^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 75^\circ} \cdot \operatorname{tg} 32^\circ \cdot \operatorname{tg} 58^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 32^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 32^\circ} = 1$.

10.22. **Wskazówka:** $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\sin 2\beta = \frac{3}{5}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{5}$.

Tożsamości trygonometryczne

10.23. **Wskazówka:** b) $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$.

10.24. Równość jest tożsamością, gdy:

Nr zadania	10.24. a)	10.24. b)	10.24. c)	10.24. d)	10.24. e)	10.24. f)
Odpowiedzi	$\cos \alpha \neq 0$	$\cos \alpha \neq 0$	$\sin \alpha \neq 0$	$\cos \alpha \neq 0$	$\alpha \in \mathbf{R}$	$\cos \alpha \neq 0$

Nr zadania	10.24. g)	10.24. h)
Odpowiedzi	$\cos \alpha \neq 0$	$\cos \beta \neq 0$ i $\cos \beta \neq -\frac{1}{2}$

Wskazówka: a) $\sin \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = \sin \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$.

10.25. a) $x \in \mathbf{R}$, b) $\operatorname{tg} x \neq 1$, $\operatorname{tg} x \neq -1$ i $\cos x \neq 0$.

Wskazówka: b) $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\frac{2 \sin^2 x \cdot \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

10.26. **Wskazówka:** a) $P = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} \neq L$,

b) $L = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \neq P$.

10.27. **Wskazówka:** Zapisz lewą stronę równości za pomocą funkcji $\sin x$ i $\cos x$.

10.28. a) $\cos \alpha \neq 0$, b) $\cos \alpha \neq -1$ i $\cos 2\alpha \neq -1$, c) $\alpha \in \mathbf{R}$,

d) $\alpha \in \mathbf{R}$, e) $\alpha \in \mathbf{R}$ i $\beta \in \mathbf{R}$,

Wskazówka:

b) $\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

e) $P = \cos^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta +$
 $+ 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta =$
 $= \cos^2 \beta (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \beta (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) =$
 $= (1 - 2 \sin^2 \alpha) (1 - 2 \sin^2 \beta) = (2 \sin^2 \alpha - 1) (2 \sin^2 \beta - 1) = L$.

10.29. Wskazówka:

$$\text{a) } L = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} = (1 + \sin \alpha \cos \alpha) \cdot \frac{2}{2} = \frac{2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{2 + \sin 2\alpha}{2} = P.$$

Wykresy funkcji trygonometrycznych

10.30. a) 1 $f(x) = \cos x$, $D = \langle -2\pi; 2\pi \rangle$,

2 $f(x) = \sin x$, $D = \langle -2\pi; 2\pi \rangle$,

3 $f(x) = \operatorname{tg} x$, $D = \left(-\frac{3}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi\right) \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right\}$.

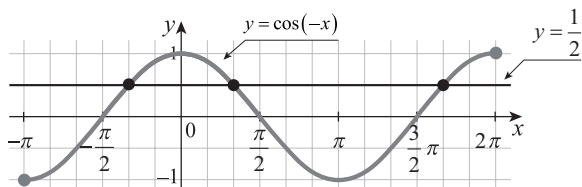
b) $f(x) < 0$, gdy $x \in \left(-\frac{3}{2}\pi; -\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right) \cup \left(\frac{5}{2}\pi; 3\pi\right)$.

c) $f_{\text{MAX}} = f(-\pi) = f(0) = 0$, $f_{\text{MIN}} = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

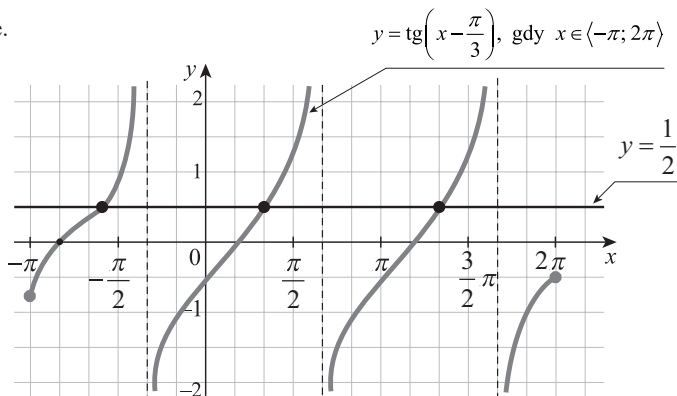
d) Funkcja f rośnie w każdym z przedziałów $\langle -\pi; 0 \rangle$, $\langle \pi; 2\pi \rangle$, a maleje w każdym

z przedziałów $\langle -2\pi; -\pi \rangle$, $\langle 0; \pi \rangle$.

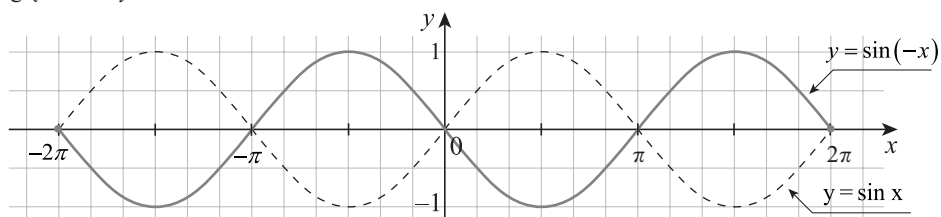
10.31. a) 3 punkty wspólne,



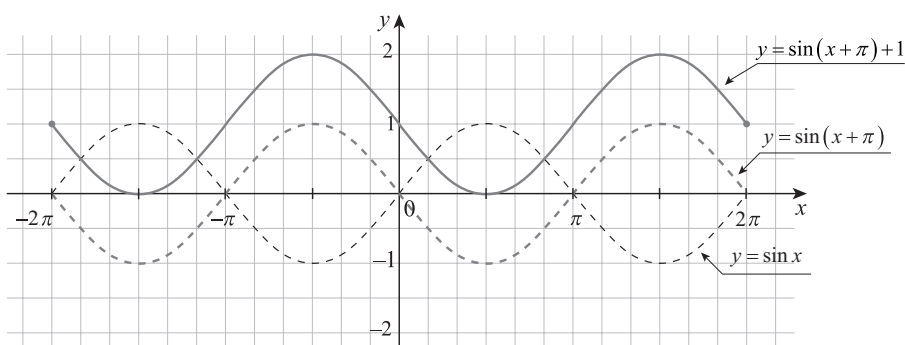
b) 3 punkty wspólne.



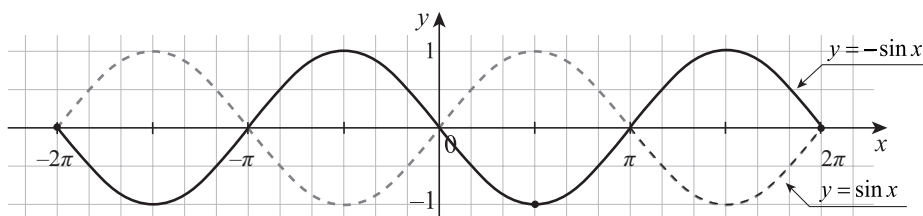
10.32. a) $Y_g = \langle -1; 1 \rangle$. Wykres funkcji $g(x) = \sin(-x)$ jest obrazem wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ w symetrii względem osi y .



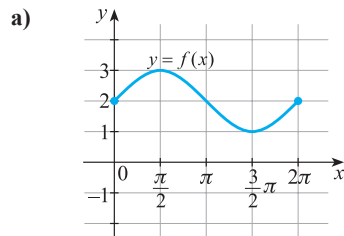
b) $Y_g = \langle 0; 2 \rangle$. Wykres funkcji $g(x) = \sin(x + \pi) + 1$ jest obrazem wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ w przesunięciu o wektor $\vec{w} = [-\pi; 1]$.



c) $Y_g = \langle -1; 1 \rangle$. Wykres funkcji $g(x) = -\sin x$ jest obrazem wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ w symetrii względem osi x .

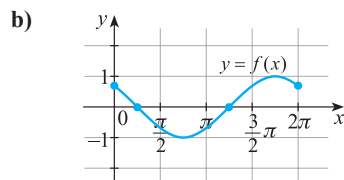


10.33.



Gdy $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, to funkcja $f(x) = \sin x + 2$ nie ma miejsc zerowych.

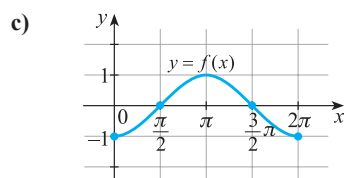
$$Y_{MIN} = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1, \quad Y_{MAX} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$



Gdy $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, to miejscami zerowymi funkcji $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

są liczby: $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5}{4}\pi$.

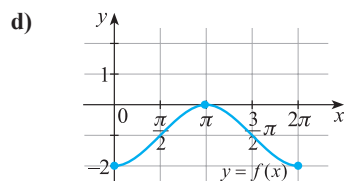
$$Y_{MIN} = f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -1, \quad Y_{MAX} = f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = 1.$$



Gdy $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, to miejscami zerowymi funkcji $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

są liczby: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$.

$$Y_{MIN} = f(0) = f(2\pi) = -1, \quad Y_{MAX} = f(\pi) = 1.$$



Gdy $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, to miejscem zerowym funkcji $f(x) = \cos(x - \pi) - 1$

jest liczba $x_0 = \pi$.

$$Y_{MIN} = f(0) = f(2\pi) = -2, \quad Y_{MAX} = f(\pi) = 0.$$

10.34. a) $k = -4$,

b) $k = \frac{1}{2}$,

c) $k = 52$,

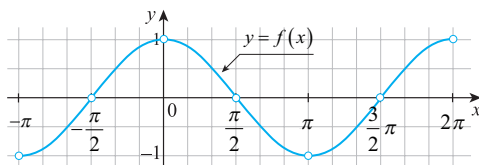
d) $k = \frac{4}{3}$.

Wskazówka: a) Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \sin x$ jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$,

więc $-1 + k = -5$ i $1 + k = -3$, skąd $k = -4$, zatem wykres funkcji f przesunięto o wektor $\vec{v} = [0, -4]$.

10.35. a) $f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$, czyli $f(x) = \cos x$, gdzie $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$.

1°



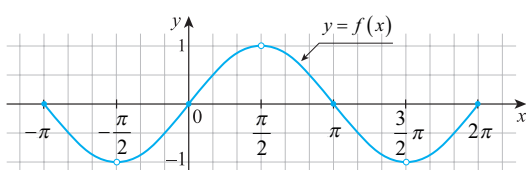
2° nie ma miejsc zerowych,

3° $Y_f = (-1; 1) \setminus \{0\}$,

4° $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$,

b) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$, czyli $f(x) = \sin x$, gdy $\cos x \neq 0$.

1°

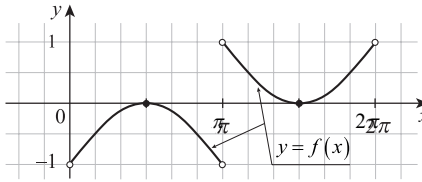


2° $x_1 = -\pi$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$, $x_4 = 2\pi$,

3° $Y_f = (-1; 1)$,

4° $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

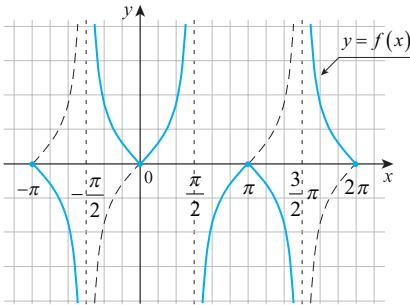
10.36. a)



b) $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3}{2}\pi.$

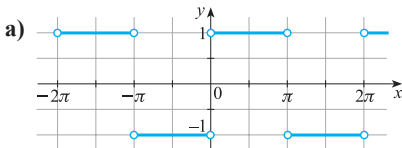
Wskazówka: a) $f(x) = \begin{cases} \sin x - 1, & \text{gdy } x \in (0; \pi) \\ \sin x + 1, & \text{gdy } x \in (\pi; 2\pi) \end{cases}$

10.37.

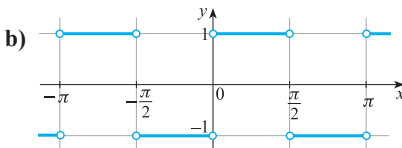
Równanie $f(x) = m$ ma 3 rozwiązania,gdy $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma 4 rozwiązania, gdy $m = 0$.

Wskazówka: $f(x) = \frac{|\sin x|}{\cos x}$ i $\cos x \neq 0$, czyli $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{gdy } \sin x \geq 0 \\ -\operatorname{tg} x, & \text{gdy } \sin x < 0 \end{cases}$

10.38.



$x \in (2k\pi; \pi + 2k\pi), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z},$



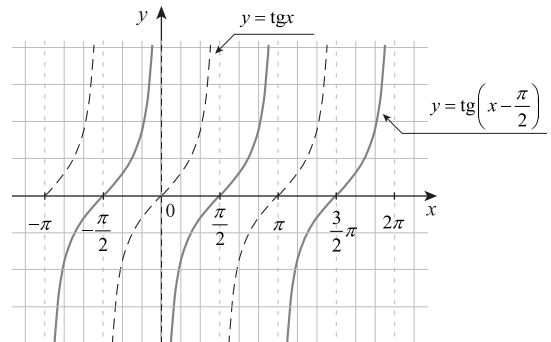
$x \in \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$

Wskazówka: a) $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \sin x > 0 \\ -1, & \text{gdy } \sin x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in (k\pi; \pi + k\pi) \\ -1, & \text{gdy } x \in (-\pi + k\pi; k\pi) \end{cases}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$

10.39. a) $f(x) = \operatorname{tg} x,$

rys. odp. b) i c)

c) $g(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$

d) równanie $g(x) = m$ ma rozwiązanie,gdy $m \in \mathbb{R}.$ 

10.40. $m = 1$.

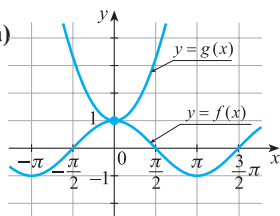
Wskazówka: $m \cos x + 3 = 2$, więc $m \cos x = -1$. Najmniejsza wartość funkcji $y = \cos x$ jest równa -1 , więc $m \cdot (-1) = -1$.

10.41. a) $Y_f = \langle -3; 1 \rangle$,b) $Y_f = \langle \frac{5}{3}; \frac{7}{3} \rangle$,c) $Y_f = \langle 1; 5 \rangle$.

Wskazówka: c) Zauważ, że $-1 \leq \cos x \leq 1$, więc $-2 \leq -2 \cos x \leq 2$, zatem $-2 + 3 \leq 3 - 2 \cos x \leq 2 + 3$.

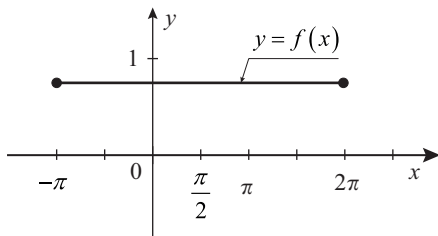
10.42. $m = 5$.

Wskazówka: $m \sin x - 2 = 3$, więc $m \sin x = 5$. Największa wartość funkcji $y = \sin x$ jest równa 1 , więc $m \cdot 1 = 5$.

10.43. a) 0 ,b) 1 .**Wskazówka:** a)

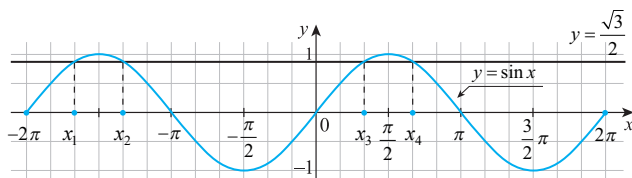
b) Wykres funkcji f otrzymasz przesuwając wykres funkcji $y = \sin x$ o wektor $\vec{u} = [1, 0]$.

10.44.

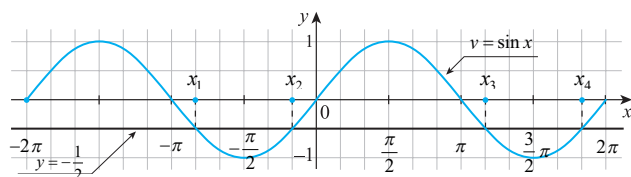


Wskazówka: $f(x) = \frac{3}{4}$, ponieważ $f(x) = \cos^2 x + \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)^2 - \cos x \cdot \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)$

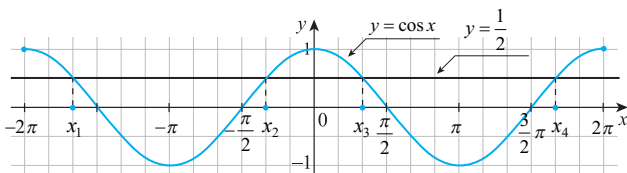
10.45. a) $x_1 = -\frac{5}{3}\pi$, $x_2 = -\frac{4}{3}\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{3}$, $x_4 = \frac{2}{3}\pi$.



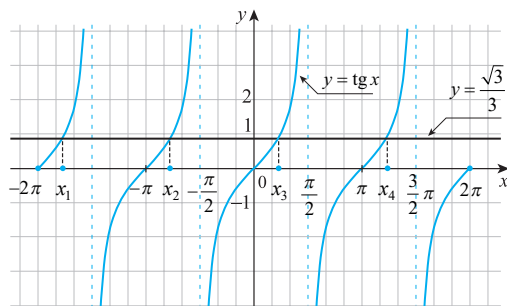
b) $x_1 = -\frac{5}{6}\pi$, $x_2 = -\frac{1}{6}\pi$, $x_3 = \frac{7}{6}\pi$, $x_4 = \frac{11}{6}\pi$.



c) $x_1 = -\frac{5}{3}\pi$, $x_2 = -\frac{1}{3}\pi$, $x_3 = \frac{1}{3}\pi$, $x_4 = \frac{5}{3}\pi$.

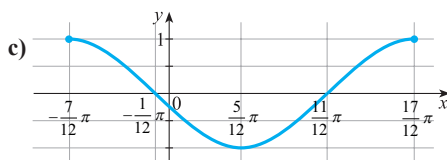


d) $x_1 = -\frac{11}{6}\pi$, $x_2 = -\frac{5}{6}\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{6}$, $x_4 = \frac{7}{6}\pi$.

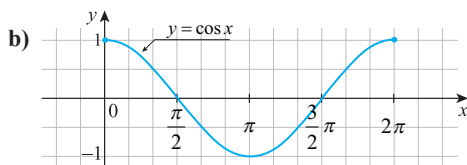


Wskazówka: d) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, bo $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{7}{6}\pi = \operatorname{tg} \left(\pi + \frac{1}{6}\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

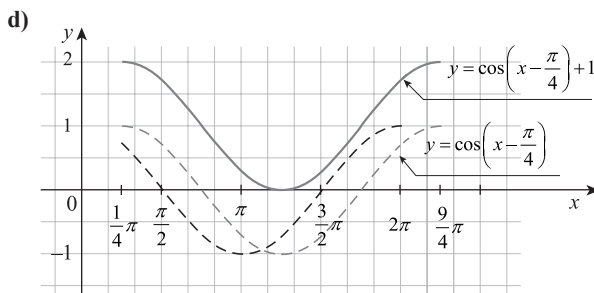
10.46. b) $f(x) = \cos \left(x + \frac{7}{12}\pi \right)$



10.47. a) $f(x) = \cos x$,



c) równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań, gdy $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$,



Równanie $g(x) = k$:

- nie ma rozwiązań, gdy $k \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$,
- ma 1 rozwiązanie, gdy $k = 0$,
- ma 2 rozwiązania, gdy $k \in (0; 2)$,

Równania trygonometryczne

10.48. a) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,

b) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,

c) $x = \frac{2}{5}k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,

d) $x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3}$ lub $x = -\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,

e) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,

f) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,

g) $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ lub $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,

h) $x = -\frac{\pi}{24} + k\pi$ lub $x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,

i) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Wskazówka: a) $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

10.49. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

b) $x = k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

d) $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, e) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

f) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, g) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

h) $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

i) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

j) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

k) $x \in \langle 0; \pi \rangle \cup \{2\pi\}$, l) $x = \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

m) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wskazówka: a) $2\sin x \cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x + 1) = 0$, skąd $\cos x = 0$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}$.

b) $\cos x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. $\cos x(\cos x - \sin x) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin x(\sin x + \cos x) = 0$, gdy $\sin x = 0$ lub $\sin x + \cos x = 0$.

Zatem $\sin x = 0$ lub $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

c) $\sin x \cdot 2\sin x \cos x = \frac{3}{2} \cos x \Leftrightarrow \cos x\left(2\sin^2 x - \frac{3}{2}\right) = 0$, skąd $\cos x = 0$ lub $\sin^2 x = \frac{3}{4}$,

e) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$,

f) $4\sin^2 x - (2\sin x \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 x - 4\sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x - 4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) - (1 - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(\sin^2 x)^2 = 1$, skąd $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ lub $\sin^2 x = -\frac{1}{2}$. Zatem $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

j) $2\frac{\sin x}{\cos x} \cos x + 1 = 2\cos x + \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 2\sin x + 1 - 2\cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) - \cos x(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)\left[\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = 0$, skąd $\cos x = \frac{1}{2}$ lub $2\cos \frac{\pi}{4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$,

k) Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, otrzymasz:

$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin x = \sin x \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \sin x < 0 \\ -\sin x = \sin x \end{cases}$, więc $x \in \langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

l) $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x$.

10.50. a) $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,

b) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,

c) $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = \pi + 2k\pi = \pi(2k+1)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,

d) $x = \frac{2\pi}{4} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Wskazówka: a) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ponieważ $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ równanie zapisz w postaci $\cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Skorzystaj z wzoru $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$ i otrzymasz równanie postaci

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ gdzie } \left(x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}.$$

d) obie strony równania pomnóż przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10.51. a) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,

c) $x \in \left\{\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, 2\pi\right\}$,

d) $x_0 = \frac{5}{6}\pi$,

e) $x \in \left\{-\frac{3}{4}\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}\right\}$.

f) $x = \frac{7}{12}\pi$ lub $x = \frac{11}{12}\pi$.

Wskazówka: a) $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

b) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x$.

f) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)\left(\cos x + \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,$$

czyli $\cos x - \sin x = 0$ lub $\cos x + \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, więc

$$\cos x = \sin x \text{ lub } \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ więc}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ lub } (\cos x + \sin x)^2 = \frac{1}{2}, \text{ czyli } 1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{2}, \text{ więc } \sin 2x = -\frac{1}{2}, \text{ skąd}$$

$$2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 2x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi.$$

Do otrzymanych rozwiązań podstaw $k = 1$, aby otrzymać rozwiązania należące do przedziału $\langle 0; \pi \rangle$.

10.52. a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
 c) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{7}{12}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Wskazówka:

a) $\sin 6x - \sin(4x + 2x) = \sin 4x \cdot \cos 2x + \cos 4x \cdot \sin 2x$, więc $\sin 4x \cdot \cos 2x - \cos 4x \cdot \sin 2x = 1$,
 skąd $\sin(4x - 2x)$,

b) $2\cos 7x = 2\cos(5x + 2x) = 2(\cos 5x \cdot \cos 2x - \sin 5x \cdot \sin 2x)$,

więc $-2\sin 5x \cdot \sin 2x - 2\cos 5x \cdot \cos 2x = -\sqrt{3}$, skąd $\cos(5x - 2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.53. 2.

Wskazówka: Z równania $2\sin x - 3\cos x = 3$ oblicz pary wartości $\sin x$ i $\cos x$, a następnie sprawdź, które z nich spełniają dane równanie. Z podanego równania wyznacz $\sin x = \frac{3}{2}\cos x + \frac{3}{2}$

i podstaw do równości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. $\left(\frac{3}{2}\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 + \cos^2 x = 1$, czyli $13\cos^2 x + 18\cos x + 5 = 0$, skąd

$\cos x = -1$ lub $\cos x = -\frac{5}{13}$. Jeżeli $\cos x = -1$, to $\sin x = 0$, a jeżeli $\cos x = -\frac{5}{13}$, to $\sin x = -\frac{12}{13}$ lub

$\sin x = \frac{12}{13}$. Zauważ, że para $\cos x = -\frac{5}{13}$ i $\sin x = -\frac{12}{13}$ nie spełnia danego równania,

bo $2 \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) \neq 3$.

Zatem są dwie pary, które spełniają: $\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} \cos x = -\frac{5}{13} \\ \sin x = \frac{12}{13} \end{cases}$.

10.54. **Wskazówka:** Z równania $2\sin x - 3\cos x = 6$ wyznacz np. $\sin x$, gdzie $\sin x = 3 + \frac{3}{2}\cos x$,

i podstaw do jedynki trygonometrycznej, skąd otrzymasz $13\cos^2 x + 36\cos x + 32 = 0$.

(Jeśli $\cos x = t$, to równanie $13t^2 + 36t + 32 = 0$ nie ma rozwiązania, bo $\Delta_t < 0$.)

10.55. **Wskazówka:** $\operatorname{tg} x + \frac{\sin x}{\sqrt{2}} = \sin x - \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sin x - \sin x}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{2}\sin x - \sin x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x + \sin x = \cos x(\sqrt{2}\sin x - \sin x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x(\sqrt{2} + 1) = \sin x \cos x(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow \sin x(\sqrt{2} + 1 - \cos x(\sqrt{2} - 1)) = 0$, czyli

$\sin x = 0$ lub $\cos x = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2 > 1$, skąd nie istnieje taki kąt x .

$x = k\pi$.

10.56. Wskazówka: $9\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} = 8 \Leftrightarrow \frac{9\sin x - 1}{8} = \cos x$. Podstaw do jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^2 x + \left(\frac{9\sin x - 1}{8} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow 145\sin^2 x - 18\sin x - 63 = 0, \text{ skąd } \sin x = \frac{21}{29} \text{ lub } \sin x = \frac{-87}{145},$$

czyli $\sin x = \frac{21}{29}$.

10.57. a) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, **b)** $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$, **c)** $x \approx 37^\circ$.

Wskazówka: b) $-1 < \operatorname{tg} x < 1$, **c)** $\frac{1}{1-\operatorname{tg} x} = 4$, skąd $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$.

10.58. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wskazówka: Zauważ, że $a_1 = \operatorname{tg} x$ i $q = \operatorname{tg}^2 x$ oraz $|\operatorname{tg}^2 x| < 1$, skąd $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zatem $\frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

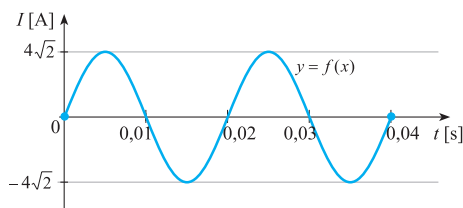
10.59. a) $a_n = \frac{\pi}{6}n$, **b)** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, **c)** 0.

Wskazówka: a) Z warunków zadania: $a_3 = \frac{\pi}{3}$ i $a_6 = \pi$, więc $a_1 = \frac{\pi}{6}$ i $r = \frac{\pi}{6}$, zatem $a_n = \frac{\pi}{6}n$.

b) $\cos a_5 - \sin a_7 = \cos \frac{5}{6}\pi - \sin \frac{7}{6}\pi = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

c) $S_{12} = \frac{\left(\frac{\pi}{6} + 12 \cdot \frac{\pi}{6}\right) \cdot 12}{2} = 13\pi$, więc $\operatorname{tg} S_{12} = \operatorname{tg} 13\pi = 0$.

10.60. **a)** $4\sqrt{2}$ A, **b)** $T = 0,02$ s.



10.61. a) $Y_H = \langle -2; 2 \rangle$, **b)** o godzinie 15^{00} , **c)** 6 godzin, **d)** co 12 godzin.