

14. Stereometria – odpowiedzi i wskazówki

Pola powierzchni i objętości graniastosłupów i ostrosłupów.

14.1. a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, b) $\cos \beta = \frac{1}{3}$.

Wskazówka: a) W trójkącie D_1OB : $|OD_1| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $|OB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|D_1B| = a\sqrt{3}$.

Z twierdzenia cosinusów mamy $3a^2 = \frac{6a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} - 2 \frac{a^2\sqrt{12}}{4} \cos \alpha$.

14.2. 96 cm^2 .

Wskazówka: $V_1 = x^3$, $V_2 = (x+1)^3$, $V_1 + 61 = V_2$.

14.3. $V = 3(2 + \sqrt{3})$, $P_b = 3(\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 4)$.

Wskazówka: $V = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin 60^\circ \cdot H$ i $P_b = H(a + b + c)$.

Z twierdzenia sinusów: $\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$, skąd $a = \sqrt{6}$ oraz $\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 75^\circ}$,

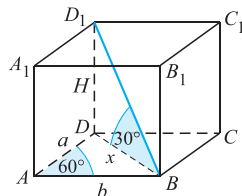
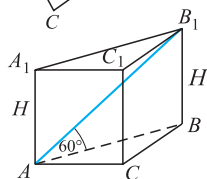
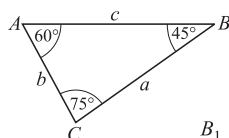
skąd $c = \frac{4 \sin 75^\circ}{\sqrt{2}}$, gdzie $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$. Zatem $c = \sqrt{3} + 1$.

W trójkącie ABB_1 : $\tan 60^\circ = \frac{H}{c}$, skąd $H = 3 + \sqrt{3}$.

14.4. $V = \frac{1}{2} ab \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$P_p = ab \sin 60^\circ$, $\frac{H}{x} = \tan 30^\circ$, gdzie $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ}$.



14.5. **Wskazówka:** a) Zauważ, że $|DB| = a\sqrt{2}$ oraz $b \perp d_2$ i $a \perp d_1$ (z twierdzenia o trzech prostopadłych i warunków zadania), stąd $\triangle BAD' \equiv \triangle BCD'$ (kbk).

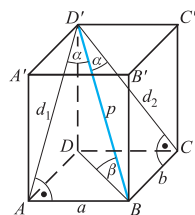
1° $|\sphericalangle BD'A| = |\sphericalangle BD'C| = \alpha$, 2° BD' – wspólny bok, 3° $|\sphericalangle ABD'| = |\sphericalangle CBD'|$,

więc $a = b$. **c.n.u.**

b) $\triangle BAD' \equiv \triangle BCD'$, więc $a = b$, $d_1 = d_2 = d$.

W trójkącie BAD' : $\frac{d}{p} = \cos \alpha$, więc $\cos^2 \alpha = \frac{d^2}{p^2}$. W trójkącie BDD' : $\frac{a\sqrt{2}}{p} = \cos \beta$, więc $\cos^2 \beta = \frac{2a^2}{p^2}$.

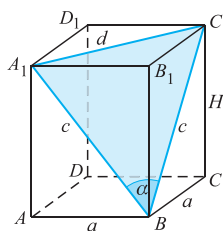
Zatem $2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{2d^2}{p^2} + \frac{2a^2}{p^2} = \frac{2}{p^2} (a^2 + d^2) = \frac{2}{p^2} \cdot p^2 = 2$. **c.n.u.**



$$14.6. V = \frac{a^3}{2} \sqrt{\frac{3(4+3\sqrt{2})}{2}}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$$|\sphericalangle ABC| = \frac{2}{3}\pi, \text{ więc } |\sphericalangle DAB| = \frac{1}{3}\pi, d = a\sqrt{3} \text{ oraz } H^2 = c^2 - a^2.$$



$$\text{Z tw. cosinusów } d^2 = 2c^2 - 2c^2 \cos \frac{\pi}{4}, \text{ czyli } 3a^2 = 2c^2 - 2c^2 \cos \frac{\pi}{4}, \text{ skąd } c^2 = \frac{3a^2}{2(1 - \cos \frac{\pi}{4})}.$$

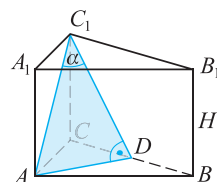
$$14.7. \text{Zadanie ma rozwiązanie, gdy } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right), V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8 \sin \alpha} \cdot \sqrt{3 - 4 \sin^2 \alpha}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$$\text{Trójkąt } ADC_1 \text{ jest prostokątny, stąd } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H.$$

$$\text{Ponieważ w } \triangle ADC_1: \frac{|AD|}{|AC_1|} = \sin \alpha, \text{ gdzie } |AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ i } |AC_1| = \sqrt{a^2 + H^2}, \text{ więc}$$

$$H^2 = \frac{a^2(3 - 4 \sin^2 \alpha)}{4 \sin^2 \alpha}. H \text{ istnieje, gdy } 3 - 4 \sin^2 \alpha > 0 \text{ i } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

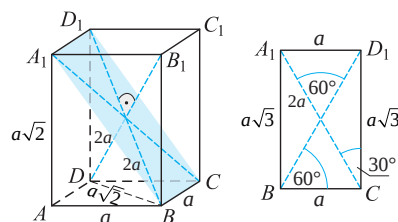


14.8. **Wskazówka:** Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Przekątne BD_1, DB_1 są równej długości, połowią się i są

prostopadłe, więc czworokąt BDD_1B_1 jest kwadratem,

w którym $|DB| = |BB_1| = a\sqrt{2}$ oraz $|BD_1| = 2a$.



$$14.9. d = 3\sqrt{21} \text{ cm.}$$

Wskazówka: Oznacz krawędzie prostopadłościanu a, aq, aq^2 . Z warunków zadania: $V = a^3 q^3$,

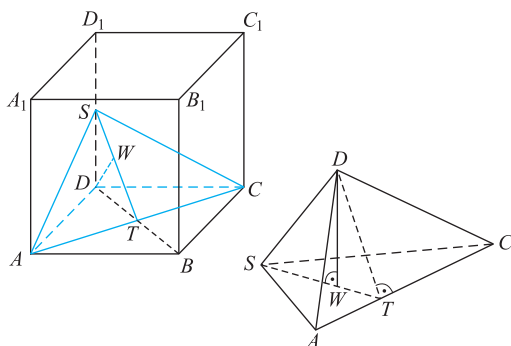
$$P_c = 2(a^2 q^2 + a^2 q + a^2 q^3). \text{ Rozwiązując układ } \begin{cases} a^3 q^3 = 216 \\ 2(a^2 q^2 + a^2 q + a^2 q^3) = 252 \end{cases}, \text{ obliczysz } a \text{ i } q.$$

$$14.10. |AW| = \frac{\sqrt{30}}{6}, |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}, |SW| = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Zauważ, że $\triangle ACS$ jest

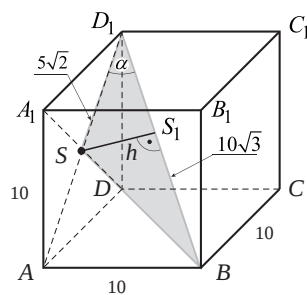
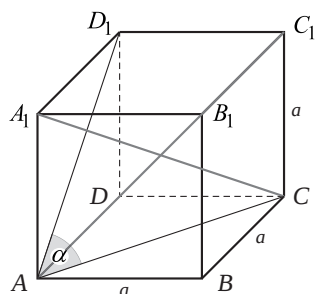
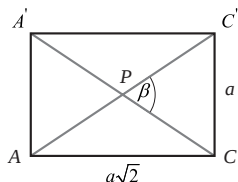
równoramienny, gdzie $|AC| = \sqrt{2}$ i $|AS| = |SC| = \frac{\sqrt{5}}{2}$,



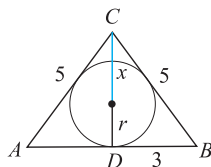
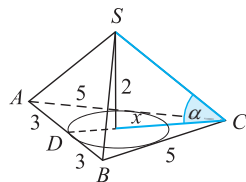
14.11. $5\sqrt{2}$.**Wskazówka:** Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

- W $\triangle ABS$: $|SB| = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$.
- W $\triangle ABD_1$: $\sin \alpha = \frac{10}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- $P_{\triangle SBD_1} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{3} = 25\sqrt{6}$ i $P_{\triangle SBD_1} = \frac{10\sqrt{3} \cdot h}{2}$,

skąd $h = \frac{25\sqrt{6}}{5\sqrt{3}}$.

14.12. $P_c = 12(2 + \sqrt{3})$, $V = 2(3\sqrt{3} + 5)$.**Wskazówka:** Przyjmij oznaczenia: a – długość krawędzi sześcianu, d – długość przekątnej sześcianu.Z warunku zadania $d = a + 2$. Ponieważ $d = a\sqrt{3}$, więc $a + 2 = a\sqrt{3}$, czyli $a = \sqrt{3} + 1$.14.13. a) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, b) $\cos \beta = \frac{1}{3}$.**Wskazówka:** b) $|AC'| = |CA'| = a\sqrt{3}$, $|PC| = |PC'| = \frac{1}{2}|AC'| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.Z twierdzenia cosinusów $a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{6}{4}\cos \beta$,więc $3a^2 \cos \beta = a^2$, skąd $\cos \beta = \frac{1}{3}$.14.14. $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$.**Wskazówka:** Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.W $\triangle ABC$: $|CD| = 4$, $p = \frac{5+5+6}{2} = 8$. $P_{\triangle ABC} = 12$ i $P_{\triangle ABC} = 8 \cdot r$, skąd $r = \frac{3}{2}$, czyli $x = 4 - \frac{3}{2}$.

$$\cos \alpha = \frac{x}{|SC|}.$$



14.15. a) $V = \frac{a^3}{24 \sin 2\alpha}$, b) $\cos \beta = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Wskazówka: Zauważ, że spodek wysokości

ostrosłupa pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na jego podstawie.

Przyjmij $|BC| = a$, $|AO| = R$ – długość promienia okręgu opisanego na podstawie

ostrosłupa, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ASO| = \alpha$, $|\sphericalangle ADS| = \beta$ i $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $|AS| = |BS| = |CS| = c$.

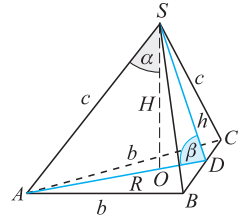
a) Stosując definicje funkcji trygonometrycznych w odpowiednich trójkątach prostokątnych oraz twierdzenia

sinusów w trójkącie ABC , wyznaczamy: $b = \frac{a}{2 \cos \alpha}$, $R = \frac{a}{2 \sin 2\alpha}$, $c = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{a}{2 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}$,

$$H = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{a}{2 \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a}{4 \sin^2 \alpha}.$$

b) Z warunku $\alpha = 60^\circ$ wynika, że $a = b$. Zatem $|OD| = \frac{a}{4 \sin 120^\circ}$, skąd $|OD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

W trójkącie ODS mamy $h = \frac{\sqrt{7}}{6}a$.



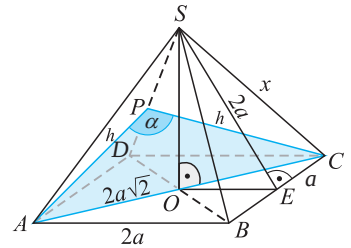
14.16. $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku,

gdzie $|OS| = H$, $|OA| = 2\sqrt{2}a$.

W $\triangle SOE$: $H = \sqrt{3}a$, w $\triangle SEC$: $x = \sqrt{5}a$. $P_{\triangle BCS} = 2a^2$

i $P_{\triangle DSC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \sqrt{5}a$, skąd $h = \frac{4\sqrt{5}}{5}a$ (bo $P_{\triangle BCS} = P_{\triangle DCS}$).



Z tw. cosinusów w $\triangle ACP$: $|AC|^2 = 2 \cdot h^2 - 2h^2 \cdot \cos \alpha$, skąd $\cos \alpha = \frac{2h^2 - |AC|^2}{2h^2}$.

14.17. $V = \frac{16}{9}(\sqrt{3} + 1)$.

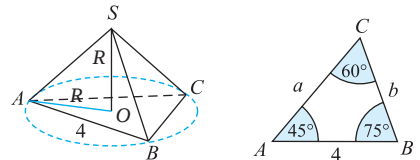
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia,

jak na rysunku. Z twierdzenia sinusów w trójkącie ABC :

1° $\frac{4}{\sin 60^\circ} = 2R$, skąd $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

2° $\frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$, skąd $b = \frac{4\sqrt{6}}{3}$,

3° $\frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin 75^\circ}$, skąd $a = \frac{2}{3}(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$, bo $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ i $P_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$.



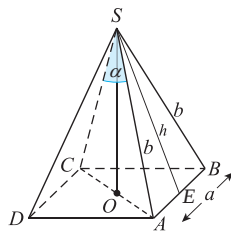
$$14.18. \sin \alpha = \frac{2\sqrt{30}}{17}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$$a^2 = \frac{1}{2}ah, \text{ skąd } h = 2a. \text{ W } \triangle AES: b^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2, \text{ więc } b = \frac{\sqrt{17}}{2} \cdot a.$$

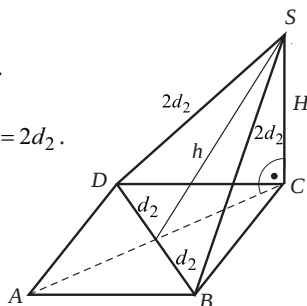
$$\text{W } \triangle ACS \text{ z twierdzenia cosinusów: } 2a^2 = \frac{17}{4}a^2 + \frac{17}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{17}{4} \cdot a^2 \cdot \cos \alpha, \text{ skąd}$$

$$\cos \alpha = \frac{13}{17}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{30}}{17}, \text{ gdzie } \alpha \in (0; \pi).$$



$$14.19. V = \frac{2}{3}d_1d_2\sqrt{3d_2^2 - d_1^2}, \text{ gdzie } d_2 > \frac{1}{3}d_1.$$

Wskazówka: $|AC| = 2d_1$, $|BD| = |BS| = |DS| = 2d_2$.



$$14.20. \tan \alpha = 2, \quad \alpha \approx 63^\circ.$$

Wskazówka: Zauważ, że punkt D jest

środkiem odcinka BC oraz E jest środkiem odcinka DB oraz

$$|CB| = |BA| = |AC| = |BS| = |AS| = a.$$

$$14.21. \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, gdzie

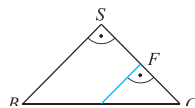
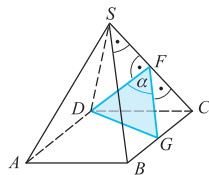
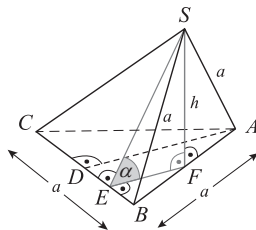
trójkąt CSB jest prostokątny i równoramienny (bo $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$),

trójkąt DCS jest równoboczny o boku długości 1.

$$\text{Zatem } |DF| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |FG| = \frac{1}{2}.$$

$$\text{W trójkącie DGC mamy } |DG| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Z tw. cosinusów dla } \triangle DGF: \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha.$$



$$14.22. |AS| = \sqrt{3} \cdot a \cdot \cos \alpha, \quad V = \frac{a^3}{8} \sin 2\alpha.$$

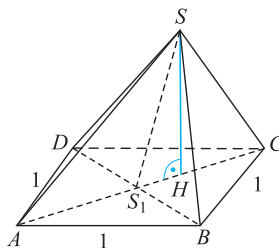
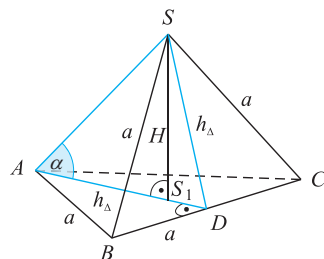
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku. Zauważ, że $\triangle ADS$ jest równoramienny i $|\angle ADS| = 180^\circ - 2\alpha$. Z tw. cosinusów dla

$$\triangle ADS: |AS|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha),$$

więc $|AS| = \sqrt{3}a \cos \alpha$. W $\triangle AS_1S$: $\frac{H}{|AS|} = \sin \alpha$.

$$14.23. V = \frac{2}{9}, \quad |AS| = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad |CS| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia: $|AH| = 2x$, $|HC| = x$.



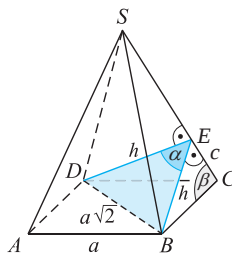
14.24. **Wskazówka:** Przyjmij oznaczenia,

jak na rysunku. Z twierdzenia cosinusów

$$\text{w } \triangle DBE: \cos \alpha = \frac{h^2 - a^2}{h^2}.$$

$$\text{W } \triangle BCE: \tan \beta = \frac{h}{c}, \text{ gdzie}$$

$$c^2 = a^2 - h^2.$$



14.25. **Wskazówka:** Jeżeli punkt K należy do wnętrza czworościanu foremnego o wysokości h , to jego

objętość jest sumą objętości ostrosłupów o podstawach będących ścianami czworościanu (trójkąty równoboczne) i wysokościach (d_1, d_2, d_3, d_4) równych odległości punktu K od poszczególnych ścian czworościanu, czyli

$$V = \frac{1}{3} P \cdot d_1 + \frac{1}{3} P \cdot d_2 + \frac{1}{3} P \cdot d_3 + \frac{1}{3} P \cdot d_4, \text{ gdzie } P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h.$$

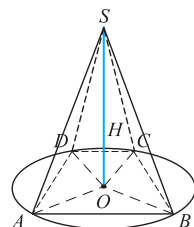
$$\text{Zatem } V = \frac{1}{3} P (d_1 + d_2 + d_3 + d_4), \text{ stąd } d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = \frac{3V}{P}. \quad \text{c.n.u.}$$

14.26. **Wskazówka:** Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, gdzie

$$\triangle SOA \equiv \triangle SOB \equiv \triangle SOC \equiv \triangle SOD, \text{ zatem } |OA| = |OB| = |OC| = |OD| = R, \text{ czyli}$$

punkt O jest środkiem okręgu o promieniu R , opisanego na trapezie.

Korzystamy z twierdzenia o okręgu opisanym na trapezie.



14.27. Wskazówka: Zauważ, że: $H = m \sin \alpha$ i $a = \sqrt{2} m \cos \alpha$,

gdzie H jest wysokością, a jest krawędzią podstawy ostrosłupa.

14.28. Wskazówka: Zauważ, że długość wysokości h poprowadzonej do krawędzi bocznej b ostrosłupa jest mniejsza od krawędzi podstawy a ($h < a$).

$$\text{Zatem } \cos \alpha = \frac{h^2 - a^2}{h^2} = 1 - \left(\frac{a}{h}\right)^2.$$

$$\frac{a}{h} > 1, \text{ więc } \cos \alpha < 0.$$

$$\mathbf{14.29. } P = 6a^2 = \frac{6h^2}{(\operatorname{tg} \alpha + 1)^2}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku,

gdzie $|SD| = h$ – długość wysokości ostrosłupa,

Zauważ, że: $|SD'| = h - a$, gdzie $a, h \in \mathbf{R}^+$.

Ściany boczne ostrosłupa są trójkątami prostokątnymi, bo

$$|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SCB| = |\sphericalangle SDC'| = 90^\circ \text{ (z twierdzenia o trzech prostopadłych)}$$

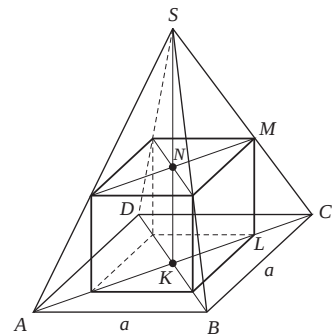
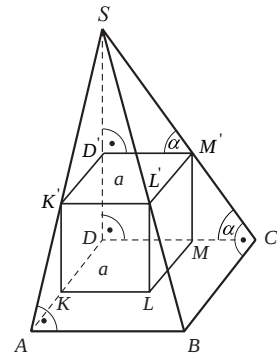
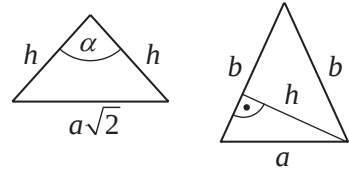
Z warunków zadania kąty DCB i SCB są proste, więc $|\sphericalangle DCS| = \alpha$. Zatem w $\triangle SD'M'$:

$$\frac{h-a}{a} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ więc } a = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha + 1}.$$

$$\mathbf{14.30. } \frac{V_{\text{ostrosłupa}}}{V_{\text{szescianu}}} = \frac{(a+H)^3}{3aH^2}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku, gdzie $|SK| = H$.

$$\text{Krawędź szescianu ma długość } b, \text{ więc: } \frac{H}{b} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{b\sqrt{2}}{2}}$$



Pola powierzchni i objętości walców, stożków i kul.

$$14.31. \quad V = \frac{P}{2} \cdot \sqrt{\frac{S-P}{2\pi}}.$$

14.32. Promienie walców: 2 i $\sqrt{7}-1$.

Wskazówka:
$$\begin{cases} \pi R^2 H = 12\pi \\ 2\pi R(R+H) = 20\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H = \frac{12}{R^2} \\ R\left(r + \frac{12}{R^2}\right) = 10 \end{cases}.$$

Równanie $R\left(R + \frac{12}{R^2}\right) = 10$, czyli $R^2 + \frac{12}{R^2} = 10$, więc $R^3 - 10R + 12 = 0$ ma dwa rozwiązania dodatnie

$$14.33. \quad V = \frac{2400\pi}{8\pi + 3\sqrt{3}} \text{ dm}^3.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia:

P_{AOB} – pole wypukłego wycinka koła AOB ,

P_{ADB} – pole odcinka koła ADB ,

$P_{\Delta AOB}$ – pole trójkąta AOB , w którym $|\sphericalangle AOB| = 120^\circ$ (ΔBEO : $\sin \beta = \frac{|OE|}{|OB|} = \frac{1}{2}$, to $\beta = 30^\circ$),

V_w – objętość wody w zbiorniku, V_z – objętość zbiornika, l – długość zbiornika.

Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku oraz uwzględnij warunki zadania, czyli:

$$\frac{3}{4} \cdot 2r = 6 \Leftrightarrow r = 4. \text{ Zatem } V_z = \pi r^2 l = 16\pi \cdot l \text{ i } 200 = V_z - P_{ACB} \cdot l.$$

Skorzystaj z wzorów na pole wycinka kołowego $P = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2$ i pole trójkąta $P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$, otrzymasz pole

$$\text{odcinka koła: } P_{ADB} = P_{AOB} - P_{\Delta AOB} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = \frac{4}{3} (4\pi - 3\sqrt{3}).$$

$$\text{Z równości } 1600\pi l - \frac{4}{3} (4\pi - 3\sqrt{3}) \cdot l = 200 \text{ oblicz } l.$$

14.34. a) Wykorzystanie kartonu jako opakowanie dla dużej puszki lub 64 małych puszek jest jednakowe.

b) Wartość zużytej blachy na wykonanie 64 małych puszek jest większa o 586 zł niż wartość blachy użytej do wykonania jednej dużej puszki.

Wskazówka:

a) • dla dużej puszki $V_d = 2000\pi \text{ cm}^3$,

• dla małej puszki $V_m = 31,25\pi \text{ cm}^3$,

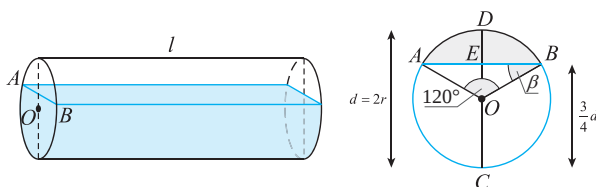
$$\text{Łączna objętość } V \text{ małych puszek zapakowanych do kartonu } 64 \cdot 31,25\pi \text{ cm}^3 = 2000\pi \text{ cm}^3.$$

W jednym kartonie umieścić można jedną dużą puszkę albo 64 małe puszki.

b) Zużycie blach obliczamy ze wzoru $P_c = 2\pi r(r+h)$, stąd:

• dla dużej puszki mamy $P_c = 600\pi \text{ cm}^2$, więc wartość blachy 188 zł.

• dla małej puszki mamy $P_c = 38,5\pi \text{ cm}^2$ i wtedy wykonanie 64 puszek kosztuje 774 zł.



14.35. $d \approx 4,2$ cm, $h \approx 10,6$ cm.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

Zauważ, że:

- $|CF| = |FE|$, więc objętość wylanej wody jest

równa połowie objętości walca $CDEF$, więc

$$V = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{|CF|}{2} \right)^2 \cdot |FE| = \frac{1}{8} \pi d^2 \text{ oraz } V = \frac{m}{\rho}, \text{ gdzie } m = 30 \text{ g},$$

$$V = 30 \text{ cm}^3, \text{ czyli } \frac{1}{8} \pi d^2 = 30.$$

- $\begin{cases} \pi d^2 h = 600 \\ \pi d^3 = 240 \end{cases}$, skąd $d = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$ i $h = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$.

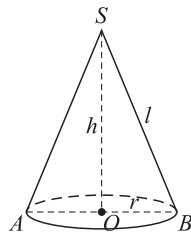
14.36. a) $|BD| = \frac{d \sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta} [\text{m}],$

b) $V = \frac{\pi d^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \sin(\alpha - \beta)}{4 \cos \alpha \sin \beta}$

14.37. $P_b = \frac{\sqrt{3V(\pi h^3 + 3V)}}{h}.$

Wskazówka: Dane: $h \in \mathbf{R}^+$ i $V > 0$.

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h, \text{ skąd } r^2 = \frac{3V}{\pi h}. \text{ W trójkącie } SOB: l = \sqrt{h^2 + r^2}, \text{ skąd } l = \sqrt{\frac{\pi h^3 + 3V}{\pi h}}.$$



14.38. $\alpha = 45^\circ$.

Wskazówka: Rozwiąż układ równań

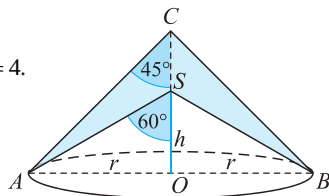
$$\begin{cases} \pi r l = 2\sqrt{2}\pi \\ \pi r(r+l) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}-1} \end{cases}, \text{ gdzie } r \text{ jest promieniem, a } l \text{ tworzącą stożka.}$$

14.39. $V = 32\pi(2 + \sqrt{3}).$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, gdzie $|SO| = h$, $|SC| = 4$.

$$\frac{r}{h} = \operatorname{tg} 60^\circ \text{ i } \frac{r}{h+4} = \operatorname{tg} 45^\circ, \text{ skąd } r = 2(\sqrt{3} + 3).$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 (h+4) - \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$



14.40. Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

R – promień koła, r_1 – promień stożka I,

r_2 – promień stożka II,

x – długość łuku jednego z wycinków koła,

$2\pi R - x$ – długość łuku drugiego z wycinków

koła.

Z wycinka, którego długość łuku jest równa x , utworzono powierzchnię boczną stożka, którego obwód

podstawy jest równy $2\pi r_1$, zatem $2\pi r_1 = x$, więc $r_1 = \frac{x}{2\pi}$. Z drugiego wycinka utworzono powierzchnię

boczną stożka, którego obwód podstawy jest równy $2\pi R - x$, zatem $2\pi r_2 = 2\pi R - x$, więc $r_2 = \frac{2\pi R - x}{2\pi}$.

Zatem $r_1 + r_2 = \frac{x}{2\pi} + \frac{2\pi R - x}{2\pi} = R$.

14.41. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Z warunków zadania: $\sin \alpha = \frac{r}{l}$, więc

$$P_{b_{st}} = P_{b_w} \Leftrightarrow \pi r l = 2\pi R l \Leftrightarrow r = 2R.$$

$$V_{st} = V_w \Leftrightarrow \frac{1}{3} \pi r^2 h = \pi R^2 l, \text{ gdzie } h = \sqrt{l^2 - r^2}. \text{ Zatem } \frac{\frac{1}{4} r^2}{l^2} = \frac{7}{64}, \text{ skąd } \frac{r}{l} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

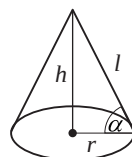
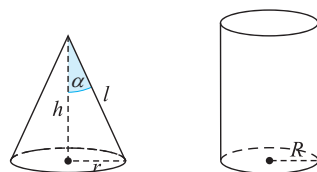
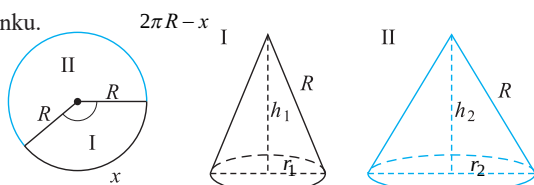
14.42. Wskazówka: Zastosuj twierdzenie cosinusów dla trójkąta, który jest przekrojem osiowym stożka, w którym $r = 3$, $l = 5$ i $h = 4$.

14.43. Wskazówka: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, więc $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. Zatem

$$\begin{cases} \frac{r}{l} = \frac{4}{5} \\ \pi r l = 80\pi \end{cases}, \text{ skąd } l = 10.$$

14.44. $1899,072 \text{ cm}^2$.

14.45. Wskazówka: $\frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^2$.



Przekroje sześciianów i ostrosupów

14.46. Około 71° .

Wskazówka:

Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

Zauważ, że:

- Przekątne sześcianu AC_1 i BD_1 należą do jednej

płaszczyzny ABC_1D_1 oraz $|AD_1| = |BC_1| = a\sqrt{2}$

i $|AC_1| = |BD_1| = a\sqrt{3}$.

- $P_{ABC_1D_1} = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$ i $P_{ABC_1D_1} = \frac{1}{2} \cdot (a\sqrt{3})^2 \cdot \sin \varphi$, skąd $\sin \varphi = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

14.47. $P = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$.

Wskazówka: W trójkącie prostokątnym BB_1S_2 mamy $|BS_2| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$.

14.48. a) $P_{\Delta ABS_1} = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$, b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Wskazówka: W trójkącie prostokątnym S_1SK :

a) $|S_1K| = \sqrt{|S_1K|^2 + |SS_1|^2}$. Zatem pole $P_{\Delta BCS_1} = \frac{|BC| \cdot |S_1K|}{2}$, b) $\cos \alpha = \frac{|SK|}{|S_1K|}$.

14.49. **Wskazówka:** $V_{ABLK_A B_1} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{1}{4} a^3$.

14.50. **Wskazówka:** Porównaj cosinusy kątów α i β .

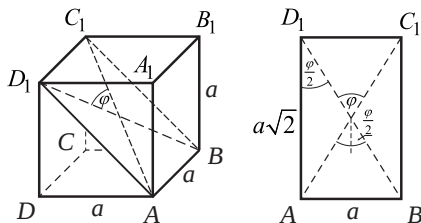
14.51. **Wskazówka:** Sześciokąt jest foremny, gdy równe są jego wszystkie boki oraz równe są te przekątne,

które są średnicami okręgu opisanego na tym sześciokącie. W trójkącie $P'Q'R'$ odcinek AB jest równy połowie długości podstawy $|P'R'| = a\sqrt{2}$, czyli $|AB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (jako odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta).

Analogicznie: $|BC| = \frac{1}{2}|Q'R| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|DC| = \frac{1}{2}|SR| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|ED| = \frac{1}{2}|PR| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|EF| = \frac{1}{2}|P'S| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|FA| = \frac{1}{2}|PQ| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Przekątna AD zawiera się w postokącie $P'Q'RS$, który jest przekrojem sześciokąta

płaszczyzną przechodzącą przez krawędzie $P'Q'$ i RS . Przekątna łączy środki przeciwległych boków prostokąta $P'Q'RS$, więc jej długość $|AD| = |Q'R| = |P'S| = a\sqrt{2}$. Analogicznie wykaż, że $|FC| = a\sqrt{2}$

i $|EB| = a\sqrt{2}$. **c.n.u.**

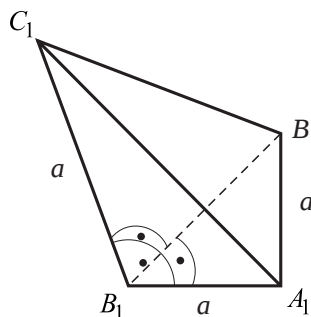


$$14.52. V_1 = \frac{a^3}{6}, \quad V_2 = \frac{5}{6}a^3.$$

Wskazówka: Jedną z brył, na które sześcian podzieliła płaszczyzna

A_1BC_1 , jest ostrosłup $A_1BC_1B_1$ o objętości V_1 (rysunek obok), którego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych mających długość a .

Wysokością ostrosłupa jest $|B_1C_1| = a$. Zatem $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a$.



$$14.53. p = \frac{5\sqrt{41}a^2}{32}.$$

Wskazówka: W trójkącie prostokątnym AA_1F :

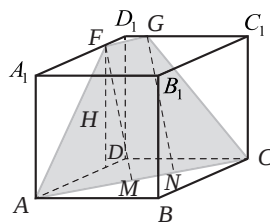
$$|AF|^2 = |AA_1|^2, \text{ skąd } |AF| = \frac{5}{4}a.$$

W trójkącie prostokątnym FGD_1 :

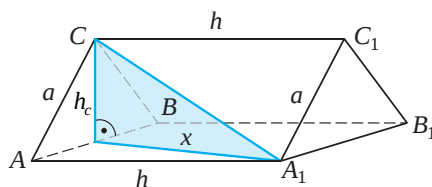
$$|FG|^2 = \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2, \text{ skąd } |FG| = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Przekątna $|AC| = a\sqrt{2}$, więc $|AM| = |NC| = \frac{|AC| - |FG|}{2}$, skąd $|AM| = \frac{3\sqrt{2}}{8}a$.

W trójkącie prostokątnym AMF : $|FM|^2 = |AF|^2 - |AM|^2$, skąd $|FM| = \frac{\sqrt{82}}{8}a$.



$$14.54. \text{Wskazówka: } h_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}.$$



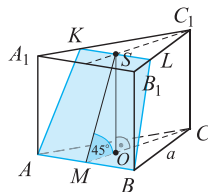
$$14.55. V = 216.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

S – środek ciężkości w trójkącie równobocznym to środek okręgu opisanego na nim.

W $\triangle MOS$: $|MO| = |SO| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $|SM| = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle KLC$, skąd $|KL| = \frac{2}{3}a$.

$$P_{ABLK} = \frac{a + \frac{2}{3}a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = 20\sqrt{6}, \text{ skąd } a = 12.$$



$$14.56. \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{2\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2 \cos \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia,

jak na rysunku. Zauważ, że $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. W $\triangle BCS$: $h = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$.

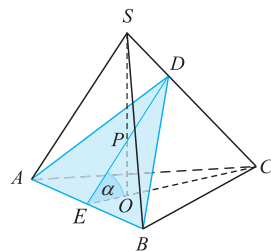
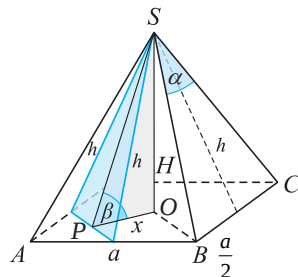
W $\triangle POS$: $\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{x}$, gdzie $H = x \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$

$$14.57. V = \frac{a^3}{12} \cdot \operatorname{tg} \alpha, P_b = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, $|OE| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

W $\triangle EOP$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|OP|}{|OE|}$. Z warunków zadania $|OS| = 2 \cdot |OP| = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

W $\triangle EOS$: $|ES|^2 = |EO|^2 + |OS|^2$, skąd $|ES| = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha}$.



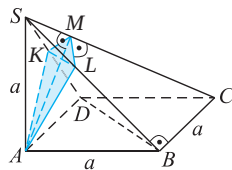
14.58. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

a) Zauważ, że: • odcinki KM i LM są prostopadłe do krawędzi SC (z tw. o prostej prostopadłej do płaszczyzny); • trójkąty SBC i SDC są prostokątne

(bo $|SB|^2 + |BC|^2 = |SC|^2$ oraz $|SD|^2 + |DC|^2 = |SC|^2$) i przystające ($\triangle SBC \equiv \triangle SDC$) (bbb), więc $|KM| = |LM|$;

• $\triangle SMK \equiv \triangle SML$ (bbb), więc $|SK| = |SL|$; • $\triangle SAB \equiv \triangle SAD$ i $|SK| = |SL|$, więc $\triangle SAL \equiv \triangle SAK$ (bkb), więc $|AL| = |AK|$. Ponieważ $|AL| = |AK|$ i $|KM| = |LM|$, więc czworokąt $ALMK$ jest deltoidem.



b) W $\triangle SAC$: • $|SC|^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$, skąd $|SC| = a\sqrt{3}$; • zauważ, że przekątna AM deltoidu jest wysokością trójkąta prostokątnego SAC , więc $P_{\triangle SAC} = P_{\triangle CSA}$, czyli

$$\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AS| = \frac{1}{2} \cdot |SC| \cdot |AM|, \text{ skąd } |AM| = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3};$$

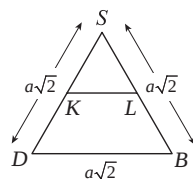
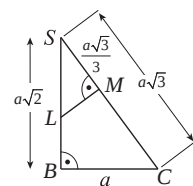
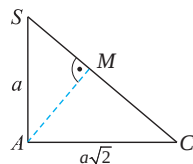
• trójkąty SMA i SAC są podobne ($\triangle SMA \sim \triangle SAC$) $\frac{|SM|}{|SA|} = \frac{|AM|}{|AC|}$, skąd $|SM| = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

W $\triangle SBC$ trójkąty SBC i SML są prostokątne i $\triangle SBC \sim \triangle SML$, więc $\frac{|SL|}{|SM|} = \frac{|SC|}{|SB|}$,

$$\text{skąd } |SL| = \frac{|SM| \cdot |SC|}{|SB|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

W $\triangle SDB$ $\frac{|KL|}{|DB|} = \frac{|SL|}{|SB|}$, więc $|KL| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Ponieważ } |AM| = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ i } |KL| = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ więc } P = \frac{1}{2} \cdot |AM| \cdot |KL| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



14.59. a) $\cos \alpha = 0,25$,

b) $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{5}$.

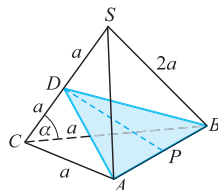
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

a) W trójkącie CBS: $\cos \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}$.

b) W trójkącie ACD: $|\sphericalangle ACD| = \alpha$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DCA oblicz: $|DA| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

W trójkącie APD: $|DP| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Zatem $P_{\triangle ABD} = \frac{a|DP|}{2}$.



14.60. a) $\cos \alpha = 0,25$, b) $P = \frac{5\sqrt{5}a^2}{8}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

W trójkącie SGB : $h^2 = (4a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, skąd $h = \frac{3\sqrt{7}}{2}a$.

W trójkącie SKG : $|SK|^2 = h^2 - |KG|^2$, gdzie $|KG| = \frac{1}{4}|DB| = \frac{\sqrt{2}}{4}a$,

więc $|SK| = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}a$.

14.61. a) $P_{\Delta BCE} = \frac{a^2\sqrt{3}\sin\alpha}{4\sin(\alpha+\beta)}$, b) $\frac{P_{\Delta BCE}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$|\sphericalangle AED| = \pi - (\alpha + \beta)$ i $P_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}a \cdot |ED|$.

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ADE : $\frac{|AD|}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = \frac{|ED|}{\sin\alpha}$,

skąd $|ED| = \frac{|AD|\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$.

14.62. $P = \frac{\sqrt{42}}{2}h^2$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Z treści zadania: $OM \parallel AS$ oraz $\Delta OCM \sim \Delta ACS$ w skali $k = \frac{1}{2}$,

ponieważ $k = \frac{|OC|}{|AC|}$.

Z twierdzenia Pitagorasa: $|AS|^2 = |OA|^2 + h^2$, gdzie $|OA| = h\sqrt{6}$, skąd $|AS| = h\sqrt{7}$, więc $|OM| = \frac{\sqrt{7}}{2}h$.

$P = \frac{1}{2}|BD| \cdot |OM|$, gdzie $|BD| = 2 \cdot |OA|$.

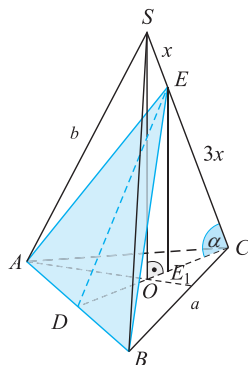
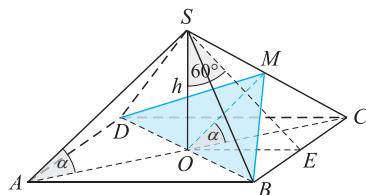
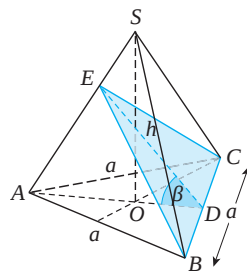
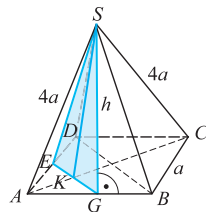
14.63. $P = \frac{3}{8}ab = 27 \text{ cm}^2$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$\Delta EE_1C \sim \Delta SOC$, więc $\frac{|E_1C|}{|OC|} = \frac{|EC|}{|SC|} = \frac{3}{4}$, skąd

$|E_1C| = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ oraz $|DE_1| = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Z trójkąta DE_1E : $|DE| = \frac{3}{4}b$.



$$14.64. P = \frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 3\alpha}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

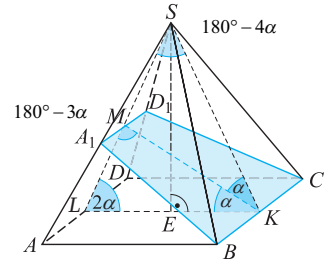
W trójkącie KLM : $\frac{|MK|}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}$, skąd $|MK| = \frac{a \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$.

W trójkącie KES : $\frac{|EK|}{|SK|} = \cos 2\alpha$ i $|EK| = \frac{a}{2}$, skąd $|SK| = \frac{a}{2 \cos 2\alpha}$.

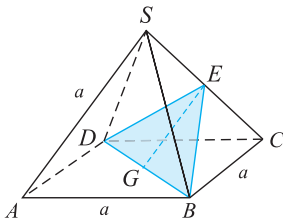
W trójkącie SKM : $\frac{|SM|}{\sin \alpha} = \frac{|MK|}{\sin(180^\circ - 4\alpha)}$, skąd $|SM| = \frac{a \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin 3\alpha \cdot \sin 4\alpha}$.

$\triangle ADS \sim \triangle A_1 D_1 S$, więc $\frac{|A_1 D_1|}{|AD|} = \frac{|SM|}{|SL|}$, skąd $|A_1 D_1| = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin 3\alpha}$.

$$P = \frac{1}{2}(|BC| + |A_1 D_1|) \cdot |MK|.$$



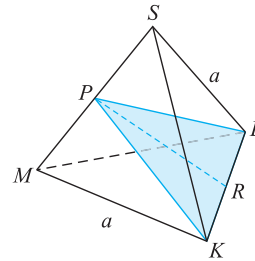
14.65. **Wskazówka:** Przyjmij oznaczenia, jak na rysunkach.



Trójkąt BCS jest równoboczny, $|EB| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$|DB| = a\sqrt{2}$. Trójkąt GEB jest prostokątny, więc

$$|EG|^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{2}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2, \text{ skąd } P_1 = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}.$$



$\triangle MKS \equiv \triangle LMS$, które są równoboczne,

więc $|KP| = |PL| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Trójkąt KRP jest prosto-

kątny, więc $|PR|^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2$, skąd $P_2 = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

$$14.66. \frac{P_{ACS}}{P_{ABCD}} = \sqrt{2}, \quad |\angle BSO| \approx 20^\circ.$$

Wskazówka:

Przyjmij oznaczenia jak na rysunku. Zauważ, że:

- Stosunek obwodu podstawy do sumy długości wszystkich krawędzi

ostrosupa jest równy 1:5, więc $\frac{4a}{4a+4b} = \frac{1}{5}$, skąd $b = 4a$.

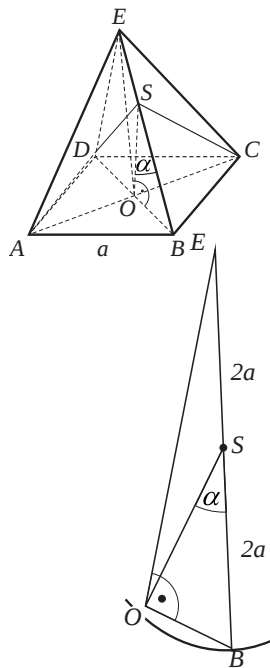
- Trójkąt OBE jest prostokątny, punkt S jest środkiem przeciwprostokątnej, więc S jest środkiem okręgu opisanego

na trójkącie OBE , więc $|OS| = 2a$.

$$\bullet \frac{P_{ACS}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot |OS|}{a^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a}{a^2} = \sqrt{2}.$$

- Z twierdzenia cosinusów dla $\triangle BSO$:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (2a)^2 + (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 2a \cdot \cos \alpha, \text{ skąd } \cos \alpha = \frac{15}{16}, \text{ więc } \alpha \approx 20^\circ.$$

**Przekroje osiowe walców i stożków**

$$14.67. P_c = \frac{8V^2 + \pi^2 S^3}{\pi S^2}.$$

Wskazówka: Z warunków zadania $\begin{cases} \pi r^2 H = V \\ 2rH = S \end{cases}$, skąd $r = \frac{2V}{\pi S}$ i $H = \frac{\pi S^2}{4V}$.

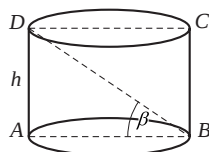
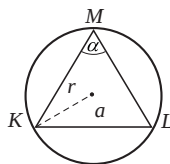
$$14.68. v = \frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \beta}{4 \sin^3 \alpha}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak

na rysunku, gdzie $|AB| = 2r$. Z twierdzenia sinusów

w trójkącie KLM : $\frac{\alpha}{\sin \alpha} = 2r$, skąd $r = \frac{\alpha}{2 \sin \alpha}$.

W trójkącie DAB : $\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{2r}$, skąd $h = 2r \operatorname{tg} \beta$, czyli $h = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha}$.



14.69. $V = 54\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$.

Wskazówka: $|AC| = |BD| = p$.

Z warunków zadania: $\frac{1}{2}p^2 \sin 60^\circ = 36\sqrt{3}$, skąd $p = 12$.

$$\begin{cases} 2RH = 36\sqrt{3} \\ H^2 + 4R^2 = 12^2 \end{cases}, \text{ skąd } R = 3 \text{ i } H = 3\sqrt{3} \text{ lub } R = 3\sqrt{3} \text{ i } H = 6.$$

Warunek $H > 2R$ spełnia tylko para liczb $R = 3$ i $H = 3\sqrt{3}$.

14.70. $P_{\text{przekroju}} = 12 \text{ cm}^2$.

14.71. Około 255° .

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

Zauważ, że:

- $|AB| = 2r = 6\sqrt{2}$, skąd $r = 3\sqrt{2}$.

- Obwód podstawy stożka ma długość $6\pi\sqrt{2}$ i jest on

długością łuku ograniczającego powierzchnię boczną stożka. Obwód okręgu o promieniu $l = 6$ jest równy 12π .

- $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{6\pi\sqrt{2}}{12\pi}$, skąd $\alpha = 360^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $\alpha \approx 255^\circ$.

14.72. **Wskazówka:** Zauważ, że $\frac{\pi r l}{\pi r^2} = 2$, skąd $l = 2r$.

14.73. $\alpha = 30^\circ$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, gdzie $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

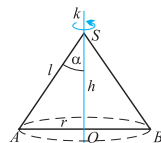
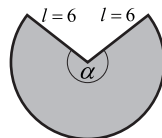
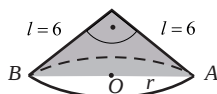
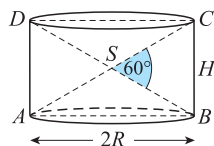
Z warunków zadania $P_c = \pi\sqrt{3}P$, czyli $\pi r(r+l) = \pi\sqrt{3}rh \quad / : \pi r$, skąd

$$r+l = \sqrt{3}h \quad / : l, \text{ więc } \otimes \quad \frac{r}{l} + 1 = \sqrt{3} \frac{h}{l}.$$

W trójkącie AOS: $\frac{r}{l} = \sin \alpha$ i $\frac{h}{l} = \cos \alpha$, więc równanie $\otimes$ przybiera postać $\sin \alpha + 1 = \sqrt{3} \cos \alpha$ i jest

równoważne równaniu $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2}$.

Zatem $\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha = \frac{1}{2}$, więc $\sin(60^\circ - \alpha) = \sin 30^\circ$.



14.74. $\alpha = 60^\circ$.**Wskazówka:** Z warunków zadania:

$$\pi \cdot \sqrt{3} \cdot P_{\Delta ABS} = P_c \Leftrightarrow \pi \sqrt{3} r h = \pi r (r + l), \text{ gdzie}$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}, \text{ skąd}$$

$$r + l = \sqrt{3} h.$$

I sposób

$$\sqrt{3} h = r + \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow (\sqrt{3} h - r)^2 = (\sqrt{h^2 + r^2})^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{3} r.$$

$$\frac{h}{r} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ skąd}$$

$$\alpha = 60^\circ.$$

II sposób

$$r + l = \sqrt{3} h, \text{ skąd } l = \sqrt{3} h - r \text{ oraz } (\sqrt{3} h - r)^2 = r^2 + h^2, \text{ skąd}$$

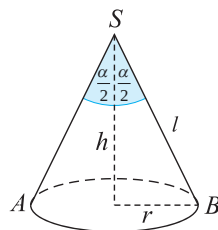
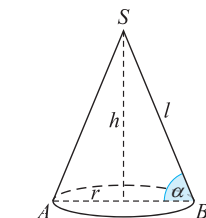
$$h = \sqrt{3} r,$$

$$\text{czyli } \frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ i } \frac{r}{h} = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$14.75. V = \frac{\pi}{3} \cdot P \cdot \sqrt{P \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

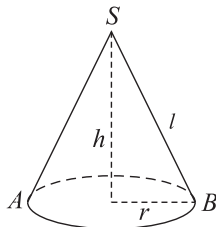
$$r \text{ i } h \text{ oblicz z układu równań } \begin{cases} r \cdot h = P \\ \frac{r}{h} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

14.76. Nie istnieje, bo wtedy $l = 0$.**Wskazówka:** $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ i $\frac{\pi r(r+l)}{rh} = \pi$, więc

$$\sqrt{\frac{r+l}{r-l}} = 1, \text{ skąd}$$

$$r + l = r - l, \text{ czyli}$$

$$l = 0.$$



Zdania optymalizacyjne z elementami rachunku różniczkowego ze stereometrii

14.77. $a = 4$, $h = 4$.

Wskazówka:

1° $L = 6a + 3h$ oraz $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$ i $V = 16\sqrt{3}$, skąd $h = \frac{64}{a^2}$.

Zatem $L(a) = 6a + 3 \cdot \frac{64}{a^2}$, czyli $L(a) = 6 \cdot \left(a + \frac{32}{a^2}\right)$, gdy $a > 0$.

2° • $L'(a) = 6 \cdot \left(1 - \frac{64}{a^3}\right) = 6 \cdot \frac{a^3 - 64}{a^3}$ i $a > 0$.

• $L'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{a^3 - 64}{a^3} = 0 \Leftrightarrow a = 4$. Zauważ, że $a^3 > 0$, gdy $a > 0$, więc:

• $L'(a) > 0 \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{a^3 - 64}{a^3} > 0 \Leftrightarrow a^3 - 64 > 0 \Leftrightarrow a \in (4; +\infty)$.

$L'(a) < 0 \Leftrightarrow a^3 - 64 < 0 \Leftrightarrow a \in (0; 4)$.

Funkcja L jest malejąca w przedziale $(0; 4)$, a rosnąca w przedziale $(4; +\infty)$, więc w punkcie $a = 4$ osiąga minimum lokalne, które jest najmniejszą wartością funkcji L , czyli $L_{\min} = L_{\min} = L(4)$.

Można to również zilustrować tabelą

a	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$L'(a)$	-	0	+
$L(a)$	$\searrow$	36	$\nearrow$

$$L_{\min} = L_{\min} = L(4)$$

14.78. $a = 1$, $H = 1$, $V_{\max} = V(1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Z warunków zadania: $6a + 3H = 9$, skąd $H = 3 - 2a$, gdzie $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$, bo $H > 0$.

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$, czyli $V(a) = \frac{\sqrt{3}}{4} (3a^2 - 2a^3)$ i $V'(a) = \frac{3\sqrt{3}}{2} (a - a^2)$.

$V'(a) = 0$, gdy $a = 1$, więc $V_{\max} = V(1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Uzasadnij, że $V_{\max} = V(1)$.

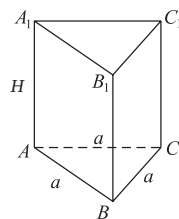
$V'(a) > 0$, gdy $a \in (0; 1)$,

$V'(a) < 0$, gdy $a \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$,

czyli funkcja V jest rosnąca, gdy $x \in (0; 1)$,

a malejąca, gdy $x \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$, co można przedstawić tabelą.

Zatem $V_{\max} = V(1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, oraz $H = 3 - 2$.



a	$(0; 1)$	1	$\left(1; \frac{3}{2}\right)$
$V'(a)$	+	0	-
$V(a)$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$

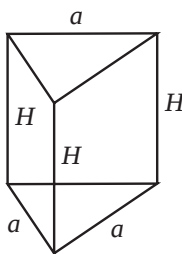
$$V_{\max}$$

14.79. b) $a = 8\sqrt{3}$, $P_{MIN} = 672\sqrt{3}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku

a) $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$ i $V = 3456$, skąd $H = \frac{4608\sqrt{3}}{a^2}$.

$P(a) = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \frac{4608\sqrt{3}}{a^2}$.



b) Jeśli $P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$, gdy $a \in (0; 8\sqrt{3})$, to $P'(a) = a\sqrt{3} - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2} = \frac{\sqrt{3}(a^3 - 13824)}{a^2}$.

$P'(a) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 13824 = 0 \Leftrightarrow a = 24$.

Zauważ, że: $24 \notin (0; 8\sqrt{3})$ i $P'(a) < 0$, gdy $a \in (0; 8\sqrt{3})$, więc funkcja P najmniejszą wartość osiąga dla $a = 8\sqrt{3}$. $P_{MIN} = P(8\sqrt{3})$.

14.80. $x = 4\sqrt[3]{5}$, $y = 4\sqrt[3]{5}$.

Wskazówka: Z warunków zadania: $V = x^2 \cdot y = 320$, skąd $y = \frac{320}{x^2}$.

1° $L = 8x + 4y$, więc $L(x) = 8x + \frac{4 \cdot 320}{x^2}$, gdzie $x > 0$.

2° $L'(x) = 8 - \frac{8 \cdot 320}{x^3} = \frac{8x^3 - 8 \cdot 320}{x^3}$, gdzie $x > 0$.

• $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 320 = 0 \Leftrightarrow x = 4\sqrt[3]{5}$.

• Uzasadnij, że długość $L_{MIN} = L(4\sqrt[3]{5})$.

$L'(x) < 0$, gdy $x \in (0; 4\sqrt[3]{5})$ funkcja L jest malejąca ($\searrow$), gdy $x \in (0; 4\sqrt[3]{5})$

$L'(x) > 0$, gdy $x \in (4\sqrt[3]{5}; +\infty)$, więc funkcja L jest rosnąca ($\nearrow$), gdy $x \in (4\sqrt[3]{5}; +\infty)$

• Zatem $L_{MIN} = L_{\min}(4\sqrt[3]{5})$.

x	$(0; 4\sqrt[3]{5})$	$4\sqrt[3]{5}$	$(4\sqrt[3]{5}; +\infty)$
$L'(x)$	-	0	+
$L(x)$	0 $\searrow$	$L_{\min}$	0 $\nearrow$

Uzasadnienie to można zilustrować tabelką.

14.81. $x = 2$,**Wskazówka:** Przyjmij oznaczenia: x – długość wysokości prostopadłościanu ($x > 0$), a – długość krawędzi jego podstawy ($a > 0$), więc $V = a^2 \cdot x$.Z warunków zadania $8a + 4x = 24$, skąd $a = 3 - \frac{1}{2}x$.Ponieważ $a > 0$ i $x > 0$, czyli $3 - \frac{1}{2}x > 0$ i $x > 0$, więc $x \in (0; 6)$.

$$V(x) = x \cdot \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2 = 9x - 3x^2 + \frac{1}{4}x^3, \quad V'(x) = 9 - 6x + \frac{3}{4}x^2 \text{ i } x \in (0; 6).$$

 $V'(x) = 0$, gdy $x = 2$ i $2 \notin (0; 6)$ lub $x = 6$ i $6 \notin (0; 6)$.

x	$(0; 2)$	2	$(2; 6)$
$V'(x)$	+	0	–
$V(x)$	$\nearrow$	$V_{\max}$ 8	$\searrow$

Zatem $V_{MAX} = V_{\max} = V(2)$, bo $\lim_{x \rightarrow 0^+} V(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x\right) = 0$,

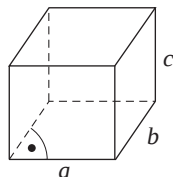
$$\lim_{x \rightarrow 6^-} V(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} \left(\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x\right) = 0.$$

14.82. 4, 4, 7.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia: a, b, c – długości krawędzi prostopadłościanu.

$$\text{Z warunków zadania } \begin{cases} 4a + 4b + 4c = 60 \\ 2ab + 2ac + 2bc = 144 \end{cases}$$

$$\text{skąd } \otimes \begin{cases} b + c = 15 - a \\ bc = 72 - a(15 - a), \text{ gdzie } a \in (0; 15) \end{cases}$$



$$V = abc, \text{ czyli } V(a) = a^3 - 15a^2 + 72a \text{ i } a \in (0; 15).$$

$$V'(a) = 3a^2 - 30a + 72, \text{ gdzie } a \in (0; 15).$$

$$V'(a) = 0, \text{ gdy } a = 4 \text{ lub } a = 6.$$

Pozostałe długości krawędzi oblicz z układu $\otimes$, gdy $a = 4$.

a	$(0; 4)$	4	$(4; 6)$	6	$(6; 15)$
$V'(a)$	+	0	–	0	+
$V(a)$	$\nearrow$	$V_{\max}$ 112	$\searrow$	$V_{\min}$ 108	$\nearrow$

$$14.83. x = \sqrt{d^2 - p^2}, y = \frac{p\sqrt{2}}{2}, z = \frac{p\sqrt{2}}{2}, V_{MAX} = \frac{p^2}{2} \cdot \sqrt{d^2 - p^2} = V\left(\frac{p\sqrt{2}}{2}\right).$$

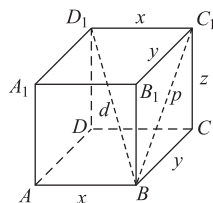
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$$V = x \cdot y \cdot z \text{ i } x^2 + y^2 + z^2 = d^2 \text{ i } z^2 + y^2 = p^2, \text{ więc } x^2 + p^2 = d^2.$$

$$\text{W trójkącie } BC_1D_1: x = \sqrt{d^2 - p^2}, \text{ w trójkącie } BCC_1: z = \sqrt{p^2 - y^2}.$$

$$\text{Zatem } V = V(y) = \sqrt{d^2 - p^2} \cdot y \cdot \sqrt{p^2 - y^2} = \sqrt{d^2 - p^2} \cdot \sqrt{p^2 y^2 - y^4}, \text{ gdzie } y \in (0; p),$$

$$\text{czyli } V(x) = \sqrt{p^2 \cdot y^2 - y^4} \text{ i } y \in (0; p), \text{ czyli } V(x) = \sqrt{p^2 \cdot y^2 - y^4} \text{ i } y \in (0; p).$$



Objętość V graniastosłupa ma największą wartość dla takiego y , dla którego funkcja f określona wzorem

$$f(y) = p^2 \cdot y^2 - y^4 \text{ ma wartość największą, bo funkcja postaci } y = \sqrt{t} \text{ jest rosnąca.}$$

$$f'(y) = 2p^2 y - 4y^3 \text{ i } y \in (0; p) \text{ albo } V'(y) = \frac{2p^2 y - 4y^3}{2\sqrt{2p^2 y - 4y^3}}.$$

$$f'(y) = 0, \text{ gdy } 2y(p^2 - 2y^2) = 0, \text{ skąd } y = \frac{p\sqrt{2}}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(y) > 0, \text{ gdy } y \in \left(0; \frac{p\sqrt{2}}{2}\right) \\ f'(y) < 0, \text{ gdy } y \in \left(\frac{p\sqrt{2}}{2}; p\right) \end{array} \right\}, \text{ więc } P_{MAX} = f_{\max}\left(\frac{p\sqrt{2}}{2}\right).$$

y	$\left(0; \frac{p\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{p\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{p\sqrt{2}}{2}; p\right)$
$f'(y)$	+	0	-
$f(a)$	$\nearrow$	$f_{\max}$	$\searrow$

$$\text{Oblicz długości } x \text{ i } z, \text{ gdy } y = \frac{p\sqrt{2}}{2}.$$

$$14.84. \text{ Krawędź podstawy } a = \sqrt[3]{4 \cdot V} \text{ i wysokość } h = \frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{4 \cdot V}}{3}.$$

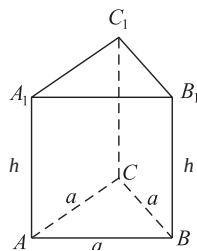
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$$\text{Z warunków zadania: } V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h, \text{ skąd } h = \frac{4V}{a^2 \sqrt{3}}.$$

$$P = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3a \cdot h, \text{ więc } P_c(a) = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{4V}{a} \right) \text{ i } a \in \mathbb{R}^+.$$

$$P'(a) = \frac{a^3 - 4V}{a^2}, P'(a) = 0, \text{ gdy } a = \sqrt[3]{4V}.$$

$$\text{Uzasadnij, że } P_{MIN} = P_c(\sqrt[3]{4V}).$$



a	$(0; \sqrt[3]{4V})$	$\sqrt[3]{4V}$	$(\sqrt[3]{4V}; +\infty)$
$P'(a)$	-	0	+
$P(a)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

$$14.88. a = \frac{5 - \sqrt{13}}{3} \text{ i } b = \frac{\sqrt{13} - 2}{3}.$$

Wskazówka:

Przyjmij oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

b – długość krawędzi bocznej ostrosłupa,

H – długość wysokości ostrosłupa, V – objętość ostrosłupa.

Z warunków zadania: $4a + 4b = 4$, skąd $b = 1 - a$ i $a \in (0; 1)$.

Z twierdzenia Pitagorasa: $b^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$, skąd $H = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - 2a + 1}$.

$$V = V(a) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - 2a + 1} = \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot \sqrt{2a^2 - 8a + 4}, \text{ gdzie } a \in (0; 2 - \sqrt{2}).$$

$$V(a) = \frac{1}{6} \sqrt{2a^6 - 8a^5 + 4a^4},$$

$$V'(a) = \frac{1}{6} \cdot \frac{12a^2 - 40a^4 + 16a^3}{2\sqrt{2a^6 - 8a^5 + 4a^4}},$$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow 4a^3(3a^2 - 10a + 4) = 0,$$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{5 - \sqrt{13}}{3} \vee a = \frac{5 + \sqrt{13}}{3} \text{ i } \frac{5 + \sqrt{13}}{3} \in (2; -\sqrt{2}).$$

$$14.89. P_{MAX} = P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot k\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} k^2.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

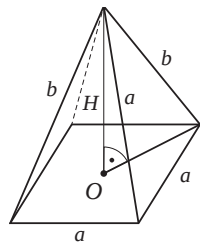
Zauważ, że szukanym przekrojem jest trójkąt równoramienny SLM , którego pole

$$P = \frac{1}{2} \cdot |LM| \cdot |SN|, \text{ gdzie } |LM| = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \text{ i } |SN| = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{16k^2 - 6a^2} \text{ (bo } \frac{|LM|}{|AC|} = \frac{1}{2} \text{)}.$$

$$\text{Z tw. Pitagorasa w } \triangle SNM \text{ i } \triangle SMB: |SN|^2 = |SM|^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot |LM|\right)^2 \text{ i } |SM|^2 = |SB|^2 - |BM|^2.$$

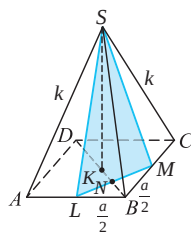
$$\text{Zatem } P = P(a) = \frac{1}{8} \cdot a \cdot \sqrt{8k^2 - 3a^2} = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{8k^2 a^2 - 3a^4}, \text{ gdzie } a \in (0; k\sqrt{2}) \text{ i } P'(a) = \frac{1}{8} \cdot \frac{16k^2 a - 12a^3}{2\sqrt{8k^2 a^2 - 3a^4}}.$$

$$\text{Uzasadnij, że } P_{MAX} = P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot k\right) \text{ i oblicz wartość } P_{MAX} \text{ dla } a = \frac{a\sqrt{3}}{3} k.$$



$$V_{MAX} = V\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{3}\right)$$

a	$\left(0; \frac{5 - \sqrt{13}}{3}\right)$	$\frac{5 - \sqrt{13}}{3}$	$\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{3}; 2 - \sqrt{2}\right)$
$V'(a)$	+	0	-
$V(a)$	$\nearrow$	V_{MAX}	$\searrow$



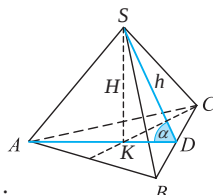
14.90. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, więc $\alpha \approx 55^\circ$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Zauważ, że $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H$. Ponieważ $h = \frac{2P}{a}$ (bo $P = P_{\Delta BCS} = \frac{1}{2} a \cdot h$) oraz

$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2}, \text{ więc } V = V(a) = \frac{1}{24} \cdot \sqrt{48P^2 a^2 - a^6}, \text{ gdzie } a \in (0; 2\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{P}).$$

Uzasadnij, że $V_{MAX} = V(2\sqrt{P})$. W trójkącie prostokątnym SKD oblicz $\cos \alpha = \frac{|KD|}{h}$.



14.91. $r = 5$ dm, $h = 10$ dm.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia: r, h odpowiednie długościami promienia podstawy walca i wysokości walca, gdzie $r > 0, h > 0$. Z warunków zadania: $2\pi r(r+h) = 150\pi$, skąd $r \cdot h = 75 - r^2$.

$r > 0$ i $h > 0$, więc $rh > 0$, skąd $75 - r^2 > 0$, czyli $r \in (0; 5\sqrt{3})$.

$$\begin{cases} V = \pi r^2 h \\ rh = 75 - r^2 \end{cases}, \text{ więc } V(r) = \pi(75r - r^3).$$

$V'(r) = \pi(75 - 3r^2)$; $V'(r) = 0$, gdy $r = 5$ (bo $5 \in (0; 5\sqrt{3})$).

Uzasadnij, że $V_{MAX} = V(5)$.

14.92. $r = 5$.

Wskazówka: Z warunków zadania: $\pi r^2 \cdot h = 250\pi$ skąd $h = \frac{250}{r^2}$, więc:

1° $P_c(r) = 2\pi \left(r^2 + \frac{250}{r} \right)$, gdzie $r \in (0; +\infty)$.

2° $P'_c(r) = 2\pi \left(2r - \frac{250}{r^2} \right)$, $P'(r) = 0$, gdy $r = 5$,

3° $P'(r) > 0$, gdy $r > 5$ i $P'(r) < 0$, gdy $r \in (0; 5)$, więc $P_{MIN} = P_{\min} = P(5)$.

14.93. $r = 8$ cm i $h = 8$ cm.

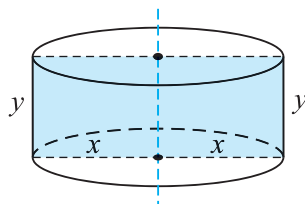
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Oznacz: $x = r$ walca, $y = h$ walca.

$4x + 2y = 48$, więc $y = 24 - 2x$ i $x \in (0; 12)$.

$V(x) = 2\pi(12x^2 - x^3)$, $V'(x) = 6\pi \cdot x(8 - x)$, $V'(x) = 0$, gdy $x = 8$.

$x \in (0; 8)$, to $V'(x) > 0$
 $x \in (8; 12)$, to $V'(x) < 0$ }, więc $V_{MAX} = V(8)$.



14.94. $\frac{R}{H} = \frac{1}{2}.$

Wskazówka: $V = \pi R^2 \cdot H$, więc $H = \frac{V}{\pi R^2}$ i $R \in (0; +\infty)$.

$$P = 2\pi R^2 + 2\pi RH, \text{ więc } P_c(R) = 2\pi \left(R^2 + \frac{V}{\pi R} \right). \quad P'(R) = 2\pi \left(2R - \frac{V}{\pi R^2} \right); \quad P'(R) = 0, \text{ gdy } R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Uzasadnij, że powierzchnia $P_{MIN} = P \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \right)$.

14.95. $r = \sqrt[3]{\frac{0,2}{\pi}} \text{ dm}; \quad h = \sqrt[3]{\frac{1,6}{\pi}} \text{ dm}.$

Wskazówka: Dane: $V = 0,4 \text{ dm}^3$, $r, h \in \mathbf{R}^+$.

Potraktuj puszkę jako walec i przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$$V = \pi \cdot r^2 h \text{ i } V = 0,4, \text{ więc } h = \frac{0,4}{\pi \cdot r^2}, \text{ skąd } P_c = P_c(r) = 2\pi \cdot r^2 + \frac{0,8}{r} \text{ i } r \in (0; +\infty).$$

$$P'_c(r) = 4\pi \cdot r - \frac{0,8}{r^2}, \text{ gdzie } r > 0. \quad P'_c(r) = 0, \text{ gdy } \frac{4\pi \cdot r^3 - 0,8}{r^2} = 0, \text{ skąd } r = \sqrt[3]{\frac{0,2}{\pi}}.$$

$P'_c(r) < 0$, gdy $r \in \left(0; \sqrt[3]{\frac{0,2}{\pi}} \right)$ i $P'_c(r) > 0$, gdy $r > \sqrt[3]{\frac{0,2}{\pi}}$, więc dla $r = \sqrt[3]{\frac{0,2}{\pi}}$ puszka ma najmniejszą

powierzchnię, czyli $P_{MIN} = P \left(\sqrt[3]{\frac{0,2}{\pi}} \right)$.

14.96. Walec ma największą objętość gdy $r = \sqrt{\frac{P_c}{6\pi}}$ i $h = 2r$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$$P = 2\pi rh + 2\pi r^2, \text{ skąd } h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r}, \text{ gdzie } r \in \left(0; \sqrt{\frac{P}{2\pi}} \right).$$

$$V = \pi r^2 \cdot h, \text{ więc } V(r) = \frac{1}{2} (P_c \cdot r - 2\pi r^3).$$

Uzasadnij że $V_{MAX} = V \left(\sqrt{\frac{P_c}{6\pi}} \right)$.

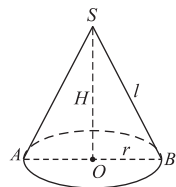
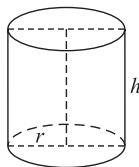
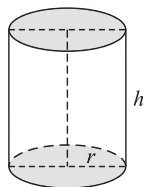
14.97. $H = 1,5 \text{ cm}, \quad l = 4,5 \text{ cm}, \quad r = 3\sqrt{2} \text{ cm}, \quad V_{MAX} = V(1,5) = 9\pi.$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, gdzie $l = 6 - H$.

W trójkącie AOS : $H^2 + r^2 = (6 - H)^2$, skąd $r^2 = 36 - 12H$.

Zatem $V(H) = \frac{1}{3} \pi (36 - 12H)H$, gdzie $H \in (0; 3)$.

Uzasadnij, że $V_{MAX} = V(1,5)$.



14.98. $h = \sqrt{3}$.

Wskazówka: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$, gdzie $r^2 = l^2 - h^2$. $V(h) = \frac{1}{3}\pi(9h - h^3)$,

gdzie $h \in (0; 3)$, bo $9h - h^2 > 0$.

$V'(h) = \pi(3 - h^2)$. $V'(h) = 0$, gdy $h = \sqrt{3}$. $V_{MAX} = V(\sqrt{3})$.

h	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; 3)$
$V'(h)$	+	0	-
$V(h)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

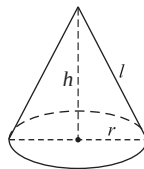
14.99. $h = \frac{\sqrt{3}}{3}l$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$r^2 = l^2 - h^2$ i $h \in (0; l)$. $V(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot h(l^2 - h^2) = \frac{\pi}{3}(l^2h - h^3)$.

$V'(h) = \frac{\pi}{3}(l^2 - 3h^2)$. $V'(h) = 0$, gdy $h = \frac{\sqrt{3}}{3}l$.

Uzasadnij, że $V_{MAX} = V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}l\right)$.



14.100. Nie można.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, $V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}l\right)$.

$P_{\triangle ABC} = r \cdot h = P$, skąd $h = \frac{P}{r}$, więc $V(r) = \frac{1}{3}\pi \cdot P \cdot r$. $V(r)$ – funkcja liniowa.

$V(r)$ nie ma ekstremum. Im dłuższy jest promień, tym większa objętość.

