

3. Równania, nierówności i układy równań liniowych – odpowiedzi i wskazówki.

3.1. a) $x = 2$, b) $x = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$, c) $x = \frac{13}{3}$, d) $x = 4$, e) $x = 5$,

f) $n = 12$, g) $n = 17$, h) $x = 7$, i) $x = -\frac{1}{3}$,

3.2. a) $x \in (-8 - 5\sqrt{2}; +\infty)$, b) $x \in \left(-\infty; -\frac{8}{15}\right)$, c) $x \in \mathbf{R}$,

d) brak rozwiązania, e) $x \in \left(\frac{1}{\pi-4}; +\infty\right)$, f) $n \in \{2, 3, 4\}$.

3.3. a) Brak rozwiązania (nierówność sprzeczna), b) $x \in \mathbf{R}$, c) $x \in (2; +\infty)$.

3.4. Warunkiem spełniającym zadania są liczby: $a = 83$ lub $a = 92$.

Wskazówka: Pierwsza liczba ma postać $10x + y$. Druga liczba ma postać $10y + x$

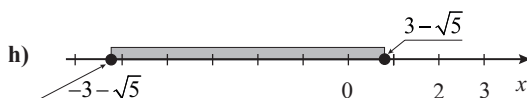
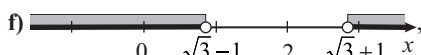
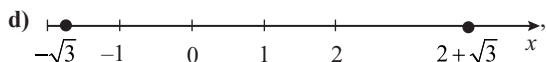
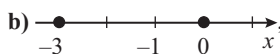
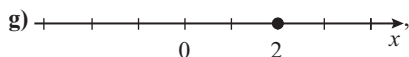
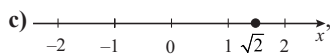
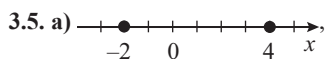
Z warunków zadania:
$$\begin{cases} 10y + x < \frac{1}{2}(10x + y) \\ x + y = 11 \end{cases}$$

Do nierówności $10y + x < \frac{1}{2}(10x + y)$ podstaw $y = 11 - x$ i otrzymasz $-27x < -209$, skąd $x > \frac{209}{27}$,

czyli $x > 7,7$ i $x \in \{1, 2, 3, \dots, 7, 8, 9\}$, więc $x = 8$ lub $x = 9$.

Jeśli $x = 8$, to $y = 3$, jeśli $x = 9$, to $y = 2$, więc szukane liczby to 83 i 92.

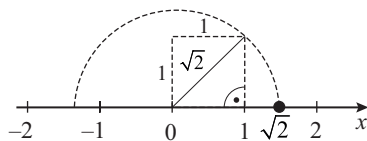
Równania i nierówności liniowe z wartością bezwzględną



Wskazówka:

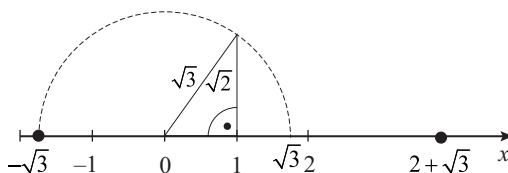
c)

$$|x - \sqrt{2}| = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{2} = 0$$

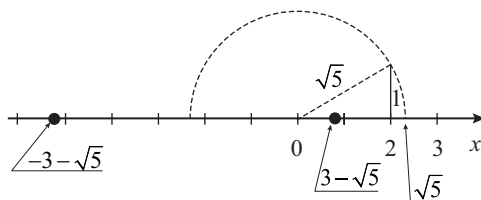


d)

$$|x - 1| = |1 + \sqrt{3}| \Leftrightarrow |x - 1| = 1 + \sqrt{3}$$



h)

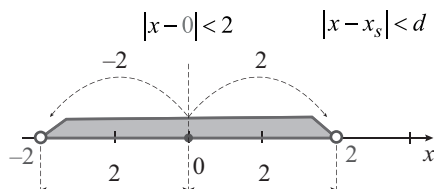


3.6. a) Jeśli $x \in (-2; 2)$, to zapis równoważny: ma postać $|x| < 2$.

Wskazówka:

1° Wyznacz środek x_s przedziału $(-2; 2)$: $x_s = \frac{-2+2}{2} = 0$.

2° Wyznacz odległość d liczby $x_s = 0$, czyli $d = |-2 - 0| = 2$, co ilustrujesz na osi (patrz rysunek poniżej)



3° Zauważ, że przedział $(-2; 2)$, to zbiór tych liczb, których odległość od środka przedziału $(-2; 2)$ jest mniejsza od 2, czyli $|x| < 2$.

3.6. b) Jeśli $x \in (-3; 1)$, to zapis równoważny: ma postać $|x+1| \leq 2$.

Wskazówka:



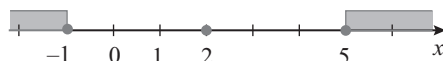
1° $x_s = \frac{-3+1}{2} = -1$.

2° $d = |-3 - (-1)| = 2$.

3° $|x - (-1)| \leq 2 \Leftrightarrow |x+1| \leq 2$.

3.6. c) Jeśli $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$, to zapis równoważny ma postać $|x-2| \geq 3$.

Wskazówka:

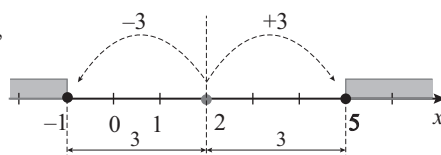


1° Wyznacz współrzędną środka $S = (x_s)$ przedziału $(-1; 5)$: $x_s = \frac{-1+5}{2} = 2$.

2° Wyznacz odległość d liczby $x_s = 2$

od końców przedziału $(-1; 5)$, czyli $d = |-1 - 2| = 3$,

co ilustrujesz na osi.



3° Zauważ, że: $|x-2| \geq 3$.

3.7. a) Pierwiastkami równania $|y|=3$ są liczby -3 i 3 . ($y \in \{-3; 3\}$)

Wskazówka: $y = -3$ lub $y = 3$.

1° Po przekształceniu równania $-(|a|-5)=7$ otrzymujemy $|a|=2$.

2° Używając symboli logicznych oraz definicji wartości bezwzględnej możesz zapisać:

$$|y|=3 \Leftrightarrow y=-3 \vee y=3.$$

3.7. b) Pierwiastkami równania $2|x|=18$ są liczby -9 i 9 . ($x \in \{-9; 9\}$)

Wskazówka: $2|x|=18$, czyli $|x|=9$, skąd $x = -9$ lub $x = 9$.

3.7. c) Pierwiastkami równania $-(|a|-9)=7$ są liczby -2 i 2 .

Wskazówka: Zauważ, że :

$$-(|a|-9)=7, \text{ gdy } -|a|+9=7, \text{ więc } |a|=2, \text{ skąd } a=-2 \text{ lub } a=2.$$

3.7. d) Pierwiastkami równania $|-7|-\frac{3|a|}{2}=1$ są liczby -4 i 4 . ($a \in \{-4; 4\}$).

Wskazówka: Zauważ, że :

$$|-7|-\frac{3|a|}{2}=1 \Leftrightarrow 7-\frac{3|a|}{2}=1 \Leftrightarrow -3|a|=-12 \Leftrightarrow |a|=4 \Leftrightarrow a=-4 \text{ lub } a=4.$$

3.7. e) Pierwiastkami równania $\sqrt{x^2-4x+4}=10$ są liczby -8 i 12 . ($x \in \{-8; 12\}$)

Wskazówka: Zauważ, że :

$$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|, \text{ czyli } |x-2|=10,$$

$$\text{czyli } x-2=-10 \text{ lub } x-2=10$$

$$x=-8 \text{ lub } x=12$$

3.7. f) Równanie $|x-3|+|x+2|=0$ nie ma rozwiązania.

Wskazówka: Zauważ, że :

$$|x-3| \geq 0 \text{ i } |x+2| \geq 0, \text{ gdy } x \in \mathbf{R}.$$

Zatem $|x-3|+|x+2|=0$, gdy $|x-3|=0$ i $|x+2|=0$, więc $x=3$ i $x=-2$ co jest sprzeczne.

3.7. g) Pierwiastkami równania $|x-3|=|2x-5|$ są liczby 2 i $2\frac{2}{3}$.

Wskazówka: Z własności $|a|=|b| \Leftrightarrow a=b \vee a=-b$ otrzymasz

$$|x-3|=|2x-5| \Leftrightarrow x-3=2x-5 \vee x-3=-2x+5$$

$$-x=-2 \vee 3x=8$$

$$x=2 \vee x=2\frac{2}{3}$$

3.7. h) Pierwiastkami równania $\sqrt{x^2 - 10x + 25} + |x - 5| = 8$ są liczby 1 i 9.

Wskazówka:

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25} + |x - 5| = 8$$

$$\sqrt{(x-5)^2} + |x-5| = 8$$

$$|x-5| + |x-5| = 8 \Leftrightarrow 2|x-5| = 8 \Leftrightarrow |x-5| = 4 \Leftrightarrow x-5 = -4 \vee x-5 = 4 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 9.$$

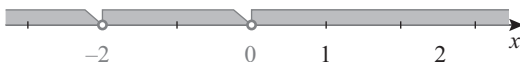
3.7. i) Pierwiastkami równania $|x+2| + |x| = 6$ są liczby -4 i 2 . ($x \in \{-4; 2\}$)

Wskazówka: Z definicji wartości bezwzględnej wynika, że:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{gdy } x \geq -2 \\ -x-2, & \text{gdy } x < -2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}.$$

Liczby -2 i 0 dzielą zbiór liczb rzeczywistych na trzy przedziały:

$$(-\infty; -2), \quad \langle -2; 0 \rangle, \quad \langle 0; +\infty \rangle.$$



Używając symboli logicznych możemy zapisać:

$$|x+2| + |x| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \\ (-x-2) + (-x) = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle -2; 0 \rangle \\ (x+2) + (-x) = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 0; +\infty \rangle \\ (x+2) + x = 6 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2) \\ x = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle -2; 0 \rangle \\ 2 = 6 - \text{zadanie fałszywe} \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 0; +\infty \rangle \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$-4 \in (-\infty; -2) \quad \text{układ nie ma rozwiązania} \quad 2 \in \langle 0; +\infty \rangle$$

czyli $x \in \{-4; 2\}$.

3.7. j) Rozwiązaniem równania $|x-3| - |x-6| = 3$ jest każda liczba x , gdy $x \in \langle 6; +\infty \rangle$.

Wskazówka: Skorzystaj z definicji wartości bezwzględnej:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{gdy } x \geq 3 \\ -x+3, & \text{gdy } x < 3 \end{cases}, \quad |x-6| = \begin{cases} x-6, & \text{gdy } x \geq 6 \\ -x+6, & \text{gdy } x < 6 \end{cases},$$

liczby 3 i 6 dzielą zbiór $\mathbf{R}$ na przedziały: $(-\infty; 3)$, $\langle 3; 6 \rangle$, $\langle 6; +\infty \rangle$.



równanie jest równoważne alternatywnie do trzech układów co możesz zapisać:

$$|x-3| - |x-6| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 3) \\ -x+3 - (-x+6) = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 3; 6 \rangle \\ x-3 - (-x+6) = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 6; +\infty \rangle \\ x-3 - (x-6) = 6 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 3) \\ -3 = 3 - \text{zadanie fałszywe} \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 3; 6 \rangle \\ x = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 6; +\infty \rangle \\ 3 = 3 - \text{zadanie zawsze prawdziwe} \end{cases},$$

$6 \notin \langle 3; 6 \rangle$

układ nie ma rozwiązań lub układ nie ma rozwiązań lub $x \in \langle 6; +\infty \rangle$

3.8. a) Rozwiązaniem nierówności $\|x|-1\| \leq 2$ jest każda liczba x , gdy $x \in \langle -3; 3 \rangle$.

Wskazówka: $\|x|-1\| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \|x|-1 \leq 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \|x\| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| \leq 3 \\ \|x\| \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| \leq 3 \\ \|x\| \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \in \mathbf{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \langle -3; 3 \rangle.$$

3.8. b) Rozwiązaniem nierówności $\|2x+3\|-1 > 4$ jest każda liczba x , gdy $x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Wskazówka: Skorzystaj z wartości wartości bezwzględnej: $\|2x+3\|-1 > 4 \Leftrightarrow$

$$\|2x+3\|-1 > 4 \quad \vee \quad \|2x+3\|-1 > -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|2x+3\|-1 > -4 \quad \vee \quad \|2x+3\| < -5$$

↙ ↘ *nierówność sprzeczna*

$$2x+3 > 5 \quad \vee \quad 2x+3 < -5$$

$$2x > 2 \quad \vee \quad 2x < -8$$

$$x > 1 \quad \vee \quad x < -4,$$

czyli $x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

3.9. a) Rozwiązaniem nierówności $|x-1|+|x| > 2$ jest każda liczba x taka że, $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Wskazówka: Skorzystaj z definicji wartości bezwzględnej:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{gdy } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{gdy } x < 1 \end{cases}, \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}.$$

Zauważ, że liczby 1 i 0 dzielą zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ na trzy przedziały:

$$\langle -\infty; 0 \rangle, (0, 1), \langle 1; +\infty \rangle.$$



Nierówność $|x-1|+|x| > 2$ jest równoważna trzem układom równań, co możesz zapisać:

$$\begin{cases} x \in \langle -\infty; 0 \rangle \\ -x+1-x > 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \in (0; 1) \\ -x+1+x > 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \in \langle 1; +\infty \rangle \\ x-1+x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \langle -\infty; 0 \rangle \\ -2x > 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \in (0; 1) \\ -x+1+x > 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \in \langle 1; +\infty \rangle \\ x-1+x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \langle -\infty; 0 \rangle \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \in (0; 1) \\ 1 > 2 \text{ (fałsz)} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \in \langle 1; +\infty \rangle \\ 2x > 3 \end{cases}$$

$$x < \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \quad \text{układ nie ma rozwiązań} \quad x > \frac{3}{2},$$

czyli $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

3.9. b) Rozwiązaniem nierówności $|x-5| < x+7$ jest każda liczba x , gdy $x \in (-1; +\infty)$.

Wskazówka: Skorzystaj z definicji wartości bezwzględnej:

$$|x-5| = \begin{cases} -x+5, & \text{gdy } x < 5 \\ x-5, & \text{gdy } x \geq 5 \end{cases},$$

czyli nierówność $|x-5| < x+7$ jest równoważna dwóm układom, co możesz zapisać:

$$\begin{aligned} |x-5| < x+7 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 5) \\ -x+5 < x+7 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 5; +\infty) \\ x-5 < x+7 \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} x \in (-\infty; 5) \\ -x+5 < x+7 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 5; +\infty) \\ x-5 < x+7 \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} x \in (-\infty; 5) \\ x > -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 5; +\infty) \\ 0 < 12 \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} x \in (-\infty; 5) \\ x \in (-1; +\infty) \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 5; +\infty) \\ x \in \mathbf{R} \end{cases} \\ &\quad x \in (-1; 5) \vee x \in \langle 5; +\infty), \end{aligned}$$

czyli $x \in (-1; 5) \cup \langle 5; +\infty) = (-1; +\infty)$.

3.9. c) Nierówność jest prawdziwa $|x-2| + 2|x-3| \geq x$ dla każdej liczby rzeczywistej $\mathbf{R}$, więc $x \in \mathbf{R}$.

Wskazówka: Skorzystaj z definicji wartości bezwzględnej:

$$|1-2x| = \begin{cases} 1-2x, & \text{gdy } x \leq \frac{1}{2} \\ -1+2x, & \text{gdy } x > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad |x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{gdy } x \geq 3 \\ -x+3, & \text{gdy } x < 3 \end{cases}.$$

Liczby $\frac{1}{2}$ i 3 dzielą zbiór liczb rzeczywistych na trzy przedziały:



Nierówność $|x-2| + 2|x-3| \geq x$ jest równoważna alternatywie trzech układów, co możesz zapisać:

$$\begin{aligned} |1-2x| + 2|x-3| \geq x &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \\ 1-2x + 2(-x+3) \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right) \\ -1+2x + 2(-x+3) \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 3; +\infty) \\ -1+2x + 2(x-3) \geq x \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \\ x \leq 1\frac{2}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right) \\ x \leq 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 3; +\infty) \\ x \geq 2\frac{1}{3} \end{cases} \\ &\quad x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \vee x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right) \vee x \in \langle 3; +\infty), \end{aligned}$$

czyli $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right) \cup \langle 3; +\infty) = \mathbf{R}$.

3.9. d) Rozwiązaniem nierówności $|2x-1| < |x+2|$ jest każda liczba x taka, że $x \in \left(-\frac{1}{3}, 3\right)$.

Wskazówka: Rozwiąż nierówność $|2x-1| < |x+2|$ i skorzystaj z własności wartości bezwzględnej:

$$|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2,$$

$$|2x-1| < |x+2| \Leftrightarrow (2x-1)^2 < (x+2)^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 < x^2 + 4x + 4$$

$$3x^2 - 8x - 3 < 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} \quad x_2 = 3$$

$$|2x-1| < |x+2| \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, 3\right).$$



3.10. Rozwiązaniem równania lub nierówności jest każda liczba x taka, że:

a) $x \in \{0, 7\}$,

b) $x \in \{-7, 0\}$,

c) $x = -2$,

d) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$,

e) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(5\frac{1}{2}; +\infty\right)$,

f) $x \in \langle 3; 13 \rangle$,

g) $x \in \left(-1; -\frac{1}{3}\right)$.

3.11. Wskazówka:

$$|x-5| + |x+6| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -6 \\ -x+5-x-6=0 \end{cases} \vee \begin{cases} -6 \leq x < 5 \\ -x+5+x+6=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 5 \\ x-5+x+6=0 \end{cases}.$$

Równania i nierówności kwadratowe

3.12. a) Równanie $(x^2 + 4x - 5)(2x^2 + 9x - 35) = 0$ jest równoważne dwóm równaniom:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x^2 + 9x - 35 = 0, \quad \text{więc} \quad x_1 = -7, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2\frac{1}{2},$$

3.12. b) Pierwiastkami równania $(4x-3)^2 - 25 = 0$ są liczby: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

3.12. c) Pierwiastkami równania $x^2(x^2-1) - 4x(x^2-1) + 4x^2 - 4 = 0$ są liczby: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

3.12. d) Pierwiastkami równania $8x^4 + 2x^2 - 1 = 0$ są liczby: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Wskazówka: Wprowadź nową zmienną np.: $x^2 = t$.

3.12. e) Pierwiastkami równania $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$ są liczby: $x_1 = -1$, $x_2 = \sqrt[3]{3}$.

Wskazówka: Wprowadź nową zmienną np.: $x^3 = t$.

3.12. f) Pierwiastkiem równania $2x - \sqrt{x} - 3 = 0$ jest liczba: $x_0 = \frac{9}{4}$.

Wskazówka: Wprowadź nową zmienną np.: $\sqrt{x} = m$, gdzie $x \geq 0$.

3.12. g) Pierwiastkami równania $\left(3 + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(3 + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$ są liczby: $x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{6}$.

Wskazówka: Wprowadź nową zmienną np.: $3 + \frac{1}{x} = t$, gdzie $x \neq 0$.

3.12. h) Pierwiastkami równania $2x^2 - |x| = 15$ są liczby: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Wskazówka: I sposób. Zauważ, że: $x^2 = (|x|)^2$, więc równanie możesz zapisać w postaci $2 \cdot (|x|)^2 - |x| - 15 = 0$.

Podstaw $|x| = m$, gdzie $x \geq 0$, więc $2m^2 - m - 15 = 0$ i $m \geq 0$.

Zatem $m_1 = -\frac{5}{2}$ lub $m_2 = 3$, czyli $|x| = -\frac{5}{2}$ i $-\frac{5}{2} < 0$ lub $|x| = 3$, więc

$x = -3$ lub $x = 3$.

II sposób

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdzie } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdzie } x < 0 \end{cases}, \text{ więc } 2x^2 - |x| - 15 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \\ 2x^2 + x - 15 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ 2x^2 - x - 15 = 0 \end{cases}.$$

3.12. i) Pierwiastkami równania $(x-6)^2 = |x-6|$ są liczby: $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_3 = 7$.

Wskazówka: I sposób.

$$(x-6)^2 = |x-6| \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6 \\ (x-6)^2 = x-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 6 \\ (x-6)^2 = x-6 \end{cases}.$$

II sposób

$$(x-6)^2 = |x-6| \Leftrightarrow (x-6)^4 = (x-6)^2 \Leftrightarrow (x-6)^2 \left[(x-6)^2 - 1 \right] = 0.$$

3.12. j) Pierwiastkiem równania $\binom{n}{2} = 5 \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{1}$ jest liczba: $n_0 = 12$.

Wskazówka: $\binom{n}{2} = 5 \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} n(n-1) = 5 \frac{1}{2} n \Leftrightarrow n^2 - 12n = 0$.

3.12. k) Pierwiastkami równania $|x^2 + 6x + 5| = 3$ są liczby: $x_1 = -3 - \sqrt{17}$, $x_2 = -3 + \sqrt{17}$, $x_3 = -4$, $x_4 = -2$.

Wskazówka: $|x^2 + 6x + 5| = 3 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 3 \vee x^2 + 5x + 6 = -3$.

3.12. l) Pierwiastkami równania $|x^2 - 4| - 4 = 0$ są liczby: $x_1 = -2\sqrt{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2\sqrt{2}$.

Wskazówka: $|x^2 - 4| - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 4 \vee x^2 - 4 = -4$.

3.13. Wskazówka: b) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2(x_1x_2)^2$. Skorzystaj z wzorów Viete'a, otrzymasz $(1000^2 - 2 \cdot 4)^2 - 2 \cdot 16 = (10^6 - 8)^2 - 32 = (10^6)^2 - 2 \cdot 10^6 \cdot 8 + 64 - 32 = (2 \cdot 5)^{12} - 16(2 \cdot 5)^6 + 32 = 2^5(2^7 5^{12} - 2^5 5^6 + 1) = 32(2^7 \cdot 5^{12} - 2^5 \cdot 2^6 + 1)$.

3.14. a) $p = 1175$ przekątnych,

b) $n = 60$ boków,

c) $n = 23$ boki wielokąta.

3.15. a) $x \in \langle -3; 3 \rangle$,

b) $x \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$,

c) $x \in (-2; 0)$.

d) nie ma rozwiązania,

e) $x \in \langle 2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2} \rangle$,

f) $x \in \langle -\infty; -\sqrt{2} \rangle \cup \{0\} \cup \langle \sqrt{2}; +\infty \rangle$,

g) $x \in \langle -4; -2 - \sqrt{2} \rangle \cup \langle -2 + \sqrt{2}; 0 \rangle$,

h) $x \in \langle -7; 3 - \sqrt{2} \rangle \cup \langle 3 + \sqrt{2}; +\infty \rangle$,

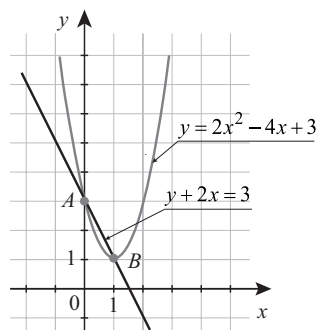
i) $n \in \{2, 3\}$.

Układy równań z dwiema niewiadomymi, w których co najmniej jedno równanie jest drugiego stopnia

3.16. a) Parabola o równaniu $y = 2x^2 - 4x + 3$ i prosta $y + 2x = 3$

przecinają w punktach $A = (0, 3)$ i $B = (1, 1)$, które zaznaczono na rysunku.

Wskazówka: Aby obliczyć współrzędne punktów przecięcia się paraboli $y = 2x^2 - 4x + 3$ i prostej $y + 2x = 3$ należy rozwiązać układ równań



$$\begin{cases} y = 2x^2 - 4x + 3 \\ y + 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 - 4x + 3 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3 = 2x^2 - 4x + 3 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x = 0 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

Rozwiązując pierwsze równanie układu równań $2x^2 - 2x = 0$, otrzymasz $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$,

więc $y_1 = 3$ i $y_2 = 1$, czyli układ równań $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x + 3 \\ y + 2x = 3 \end{cases}$ spełniają pary liczb, które są współrzędnymi

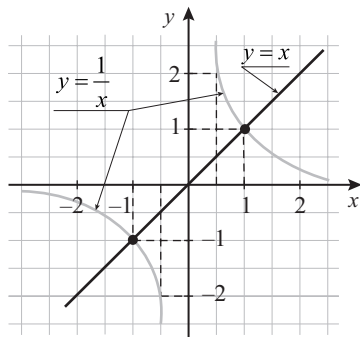
punktów przecięcia się paraboli i prostej $A = (0, 3)$ i $B = (1, 1)$.

3.16. b) Punkty przecięcia się hiperboli $xy = 1$, gdzie $x \neq 0$ i prostej o równaniu $y = x$ to punkty o współrzędnych $(1, 1)$ i $(-1, -1)$, które zaznaczono na rysunku.

Wskazówka: Aby wyznaczyć punkty przecięcia się hiperboli i prostej należy rozwiązać układ równań $\begin{cases} xy = 1 \\ y = x \end{cases}$, gdzie $x \neq 0$. Po podstawieniu $y = x$ do pierwszego równania otrzymasz równanie $x^2 = 1$, skąd $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$, więc $y_1 = -1$ i $y_2 = 1$.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} xy = 1 \\ y = x \end{cases}$

są pary liczb $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ i $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, które są współrzędnymi punktów przecięcia się prostej i hiperboli.



3.16. c) Okrąg o równaniu $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ i prosta $y = -1$

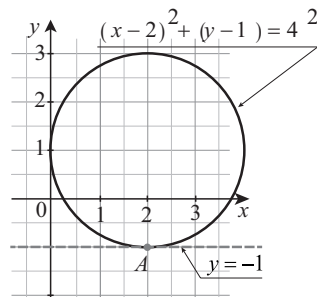
przecinają się w jednym punkcie o współrzędnych $(2, -1)$, który zaznaczono na rysunku.

Wskazówka: Oblicz współrzędne przecięcia się okręgu i prostej rozwiązując układ równań $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 \\ y = -1 \end{cases}$.

Jeśli $y = -1$ podstawisz w miejsce y do pierwszego równania, to otrzymasz równanie $x^2 - 4x + 4 = 0$, którego pierwiastkiem jest liczba $x = 2$,

więc układ $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ spełnia para liczb $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$,

które są współrzędnymi przecięcia się okręgu i prostej.



3.17. Wskazówka: Aby uzasadnić, że okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ i prostej o równaniu $x + y = 4$ nie mają punktów wspólnych należy wykazać, że układ równań $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ nie ma rozwiązania.

Po podstawieniu $y = 4 - x$ do drugiego równania układu $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ otrzymasz równanie

$2x^2 - 8x + 13 = 0$, które nie ma pierwiastków ($\Delta < 0$), czyli prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych.

3.18. Wskazówka: Do pierwszego równania układu równań $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$ w miejsce y

wstaw $y = 1 - x$. Otrzymane równanie, to równanie tożsamościowe ($0 = 0$),

czyli spełnia go każda liczba $x \in \mathbf{R}$. Pary liczb spełniające ten układ mają postać $(x, 1 - x)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

3.19. Odczytując z rysunków zauważ, że wykresy funkcji f i g przecinają się w punktach o współrzędnych $(f(x), g(x))$, gdzie $f(x) = g(x)$. Zatem pary liczb:

a) $(-2, 4)$ i $(1, 4)$, b) $(3, 3)$, c) $(2, -5)$ i $(4, 0)$, d) $(-1, 1)$ i $(2, 4)$,

w punktach **a**, **b**, **c** i **d** są rozwiązaniami układu równań $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$.

3.20. a) Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$ są pary liczb:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Wskazówka:

Jeśli z drugiego równania układu $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$ wyznaczysz $y = \frac{4}{x}$ i wstawisz do pierwszego równania

układu, to otrzymasz równanie $x^2 + \frac{16}{x^2} = 17 \mid \cdot x^2$.

$$x^4 + 16 = 17x^2$$

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Wprowadź nową zmienną np. $x^2 = t$, gdzie $t > 0$, czyli $t^2 - 17t + 16 = 0$ – rozwiąż to równanie,

skąd $t_1 = 16$ i $t_2 = 1$, czyli $x^2 = 16$ lub $x^2 = 1$, więc układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$ spełniają pary liczb

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}.$$

3.20. b) Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} y + 15 = x^2 + 2x \\ x^2 + y = 2x + 3 \end{cases}$ są pary liczb:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -12 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Wskazówka: Zauważ, że jeśli wyznaczysz y z pierwszego i drugiego równania układu równań

$$\begin{cases} y + 15 = x^2 + 2x \\ x^2 + y = 2x + 3 \end{cases}, \text{ to otrzymasz układ równań } \begin{cases} y = x^2 + 2x - 15 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}.$$

Porównując prawe strony równości, otrzymasz równanie $x^2 + 2x + 15 = -x^2 + 2x + 3$,

czyli $2x^2 = 18$, skąd $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Zatem $y_1 = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 15 = -12$, $y_2 = 0$.

3.21. a) Rozwiązaniem układu równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$
 są pary liczb: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$.

Wskazówka: Zauważ, że pierwsze równanie układu równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0 \end{cases},$$
 to

$x^2 + y^2 = 4$. Do drugiego równania układu wstaw w miejsce $x^2 + y^2$ liczbę 4.

Równanie, które otrzymasz to $4 + 4x - 4y + 4 = 0$. Po wykonaniu działań i redukcji wyrazów,

otrzymasz $y = x + 2$.

Zatem odpowiedź uzyskasz, gdy rozwiążesz jeden z układów

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad (\text{bo drugie równanie otrzymanych układów jest takie same}).$$

$x_1 = -2$ i $x_2 = 1$.

3.21. b) Rozwiązaniem układu równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 8 \\ x^2 + y^2 - 10x - 8y = -40 \end{cases}$$
 są pary liczb: $(4, 4)$, $(5, 3)$.

Wskazówka: Z pierwszego równania układu równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 8 \\ x^2 + y^2 - 10x - 8y = -40 \end{cases}$$

wyznacz $x^2 + y^2 = -4x + 2y + 8$ i wstaw do drugiego równania układu równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 8 \\ x^2 + y^2 - 10x - 8y = -40 \end{cases},$$
 to otrzymasz równanie $8 + 4x + 2y - 10x - 8y + 40 = 0$, skąd $y = 8 - x$.

Zatem układ równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 8 \\ x^2 + y^2 - 10x - 8y = -40 \end{cases}$$
 jest równoważny alternatywie układów równań,

co przy użyciu symboli logicznych możesz zapisać.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 8 \\ x^2 + y^2 - 10x - 8y = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 8 \\ y = 8 - x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0 \\ y = 8 - x \end{cases}.$$

Wystarczy rozwiązać jeden układ równań spośród dwóch ostatnich, by otrzymać odpowiedź (drugie równania układów są identyczne)

3.22. Współrzędne punktów przecięcia się okręgu

o równaniu $x^2 + y^2 = 25$ i paraboli $y = x^2 - 5$,

to: $(0, -5)$, $(-3, 4)$, $(3, 4)$, co zaznaczono na rysunku.

Wskazówka: Aby obliczyć współrzędne przecięcia się okręgu

o równaniu $x^2 + y^2 = 25$ i paraboli o równaniu $y = x^2 - 5$

należy rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x^2 - 5 \end{cases}$$
.

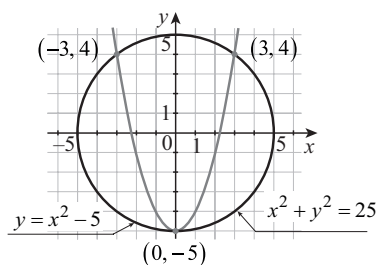
wyznacz $x^2 = y + 5$ z drugiego równania układu $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x^2 - 5 \end{cases}$ i wstaw do pierwszego równania,

to otrzymasz równanie $y + 5 + y^2 = 25$, którego pierwiastkami są liczby $y = -5$ i $y = 4$.

Zauważ, że:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x^2 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = -5 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Rozwiązując oba układy otrzymanej alternatywy otrzymasz odpowiedź.



3.23. a) Współrzędnymi punkt przecięcia się okręgów

o równaniach $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$

i $x^2 + y^2 = 4$ są punkty o współrzędnych

$(-2, 0)$ i $(0, 2)$ jak zaznaczono na rysunku.

Wskazówka: Aby obliczyć współrzędne punktów

przecięcia się okręgów o równaniach $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ i

$x^2 + y^2 = 4$ należy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 - 4y + 4 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}.$$

Ostatni otrzymany układ rozwiąż metodą podstawiania albo odejmując równania ostatniego układu stronami to jest:

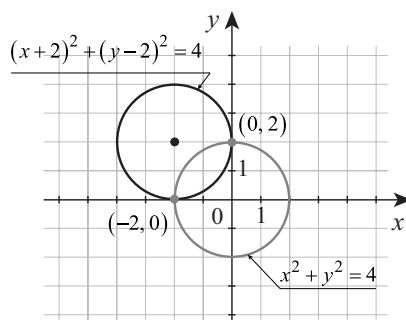
$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 + 4x + 4 - 4y + 4 = 4 \\ - (x^2 + y^2 = 4) \\ \hline \end{array}$$

$$4x + 4 - 4y + 4 = 0, \text{ skąd } y = x + 2$$

Zauważ,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 - 4y + 4 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 4y = -4 \\ y = x + 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + 2 \end{cases}.$$

Rozwiązując układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$ otrzymasz odpowiedź.



3.23. b) Współrzędnymi punktu wspólnego się okręgów

o równaniach $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$ i $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

jest punkt o współrzędnych $(0, 0)$, który zaznaczono na

rysunku.

Wskazówka: Aby obliczyć współrzędne punktów wspólnych

okręgów rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 8 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 8 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 2 \end{cases}$$

Otrzymany układ można rozwiązać metodą podstawiania wyznacza-

jąc $x^2 + y^2$ z pierwszego równania $x^2 + y^2 = 8 - 8 - 4x + 4y$

albo odjąć stronami równania układu

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 8 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 2 \end{cases}$$

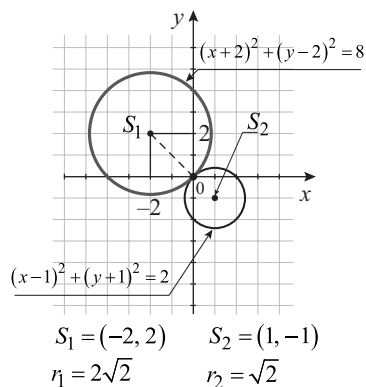
$$6x + 3 - 6y + 3 = 6$$

$$x - y = 0$$

$$y = x$$

i rozwiąż jeden z układów alternatywy

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 8 \\ y = x \end{cases} \vee \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ y = x \end{cases} \text{ otrzymasz rozwiązanie.}$$



3.24. a) Rozwiązaniem układu równań
$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 5 \\ x^2 + (y-3)^2 = 8 \end{cases}$$
 są pary liczb: $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ i $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

Wskazówka: Zauważ, że w pierwszym i drugim równaniu układu
$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 5 \\ x^2 + (y-3)^2 = 8 \end{cases}$$
 występuje wyrażenie $(y-3)^2$.
 Jeśli np. z pierwszego równania układu
$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 5 \\ x^2 + (y-3)^2 = 8 \end{cases}$$
 wyznaczysz $(y-3)^2 = 5 - (x-3)^2$ i wstawisz $5 - (x-3)^2$ do drugiego równania, to otrzymasz równanie $x^2 + 5 - x^2 + 6x - 9 = 8$, skąd $x = 2$.

Zauważ, że $(y-3)^2 = 5 - (2-3)^2$, więc $(y-3)^2 = 4$, czyli $y-3 = 2$ lub $y-3 = -2$.

Zatem pary liczb spełniające układ
$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 5 \\ x^2 + (y-3)^2 = 8 \end{cases}$$
 to $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ i $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

3.24. b) Rozwiązaniem układu równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x-y)(y+y) = 0 \end{cases}$$

są pary liczb: $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ i $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$.

Wskazówka: Zauważ, że
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x-y)(y+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x-y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x+y=0 \end{cases}.$$

Rozwiązując każdy układ równań z alternatywy otrzymasz odpowiedź (drugie równania z układów są różne)

3.24. c) Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} y = x^2 \\ y = |x| \end{cases}$ są pary liczb: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ i $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Wskazówka: Skorzystaj z definicji wartości bezwzględnej: $|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$,

$$\text{więc } \begin{cases} y = x^2 \\ y = |x| \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{1} & \text{2} \\ \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \\ y = x^2 \\ y = -x \end{cases} & \vee \begin{cases} x \in \langle 0; +\infty) \\ y = x^2 \\ y = x \end{cases} \end{matrix}.$$

$$\begin{matrix} \text{1} & \text{2} \\ \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \\ -x = x^2 \\ y = -x \end{cases} & \vee \begin{cases} x \in \langle 0; +\infty) \\ y = x^2 \\ y = x \end{cases} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \\ x^2 + x = 0 \\ y = -x \end{cases} & \vee \begin{cases} x \in \langle 0; +\infty) \\ x = x^2 \\ y = x \end{cases} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \\ x = 0 \vee x = -1 \\ y = -x \end{cases} & \vee \begin{cases} x \in \langle 0; +\infty) \\ x = 0 \vee x = 1 \\ y = x \end{cases} \end{matrix}$$

Rozwiązując układy równań 1 i 2 otrzymasz odpowiedzi, czyli $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ i $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Równania, nierówności i układy liniowe z parametrem

3.25. a) Równanie $mx - 7 = 0$ jest sprzeczne, gdy $m = 0$.

3.25. b) Równanie $mx + 2m = x + 2$ jest nieoznaczone, gdy $m = 1$.

Wskazówka: Równanie $mx + 2m = x + 2$ zapisz w postaci $ax + b = 0$, czyli w postaci $(m-1)x = 2-2m$.

3.25. c) Równanie $3mx + 5 = 6x$ ma jedno rozwiązanie, gdy $m \neq 2$. $\left(x = \frac{-5}{3m-6}\right)$

Wskazówka: Zauważ, że $3mx + 5 = 6x \Leftrightarrow (3m-6)x + 5 = 0$.

3.25. d) Równanie $(m-3)x = 2x + 4$ nie ma rozwiązania, gdy $m = 5$.

Wskazówka: Zauważ, że $(m-3)x = 2x + 4 \Leftrightarrow (m-5)x - 4 = 0$.

3.25. e) Równanie $mx - 3 = x + 2$ ma co najmniej jedno rozwiązanie, gdy $m \neq 1$ $\left(x = \frac{5}{m-1}\right)$.

Wskazówka: Zauważ, że $mx - 3 = x + 2 \Leftrightarrow (m-1)x - 5 = 0$.

3.25. f) Równanie $2mx - 3x = 2m - 3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $m = \frac{3}{2}$.

Wskazówka: Zauważ, że $2mx - 3x = 2m - 3 \Leftrightarrow (2m-3)x - 2m + 3 = 0$.

3.26. a) Równanie $mx - 2(m + 2) = 2 - 3x$ równoważne równaniu $(m + 3)x = 2m + 6$ ma:

- jedno rozwiązanie $x = \frac{2(m+3)}{m+3} = 2$, gdy $m \neq -3$,
- nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $m = -3$.

3.26. b) Równanie $mx^2 - 5 = 25x + m$ równoważne równaniu $(m^2 - 25)x = 5 + m$:

- ma jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{m-5}$, gdy $m \neq 5$ i $m \neq -5$, czyli gdy $m \in \mathbf{R} \setminus \{-5, 5\}$,
- nie ma rozwiązania, gdy $m = 5$, ponieważ równanie przyjmuje postać $0 \cdot x = 10$, (sprzeczność)
- ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $m = -5$, ponieważ równanie przyjmuje postać $0 \cdot x = 5 - 5$, czyli $0 \cdot x = 0$. (równanie tożsamościowe)

3.27. a) Równania są równoważne dla $p = \frac{1}{2}$.

Wskazówka: Równania są równoważne, gdy ich dziedziny są równe $D_1 = D_2 = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

Z równania pierwszego $x = \frac{3}{p+1}$. Z równania drugiego otrzymujesz $x = 2$. Zatem $\frac{3}{p+1} = 2$, gdy $p = \frac{1}{2}$.

3.27. b) Równania nie są równoważne, bo nie ma takiej wartości p , aby pierwiastki obu równań były równe.

Wskazówka: Z pierwszego równania $x = \frac{2-3p}{2p}$. Z drugiego równania $x = \frac{2p}{p-2}$.

$$\frac{2-3p}{2p} = \frac{2p}{p-2} \Leftrightarrow 7p^2 - 8p + 4 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 7 \cdot 4$$

brak rozwiązania, bo $\Delta < 0$.

3.28. Pierwiastek x równania $3x - k = 2(k+1) + x$ jest większy od 4, gdy $k \in (2; +\infty)$.

Wskazówka: Równanie $3x - k = 2(k+1) + x$ jest równoważne równaniu $2x - 3k - 2 = 0$, skąd

$$x = \frac{3k+2}{2} \text{ i } x > 4, \text{ więc } \frac{3k+2}{2} > 4, \text{ gdy } k > 2.$$

3.29. • Równanie $\frac{x+m}{k} - \frac{k}{m} = \frac{2x-k}{m}$ ma rozwiązanie, gdy $m \neq 0$, $k \neq 0$ i $2k \neq m$.

- Równanie $\frac{x+m}{k} - \frac{k}{m} = \frac{2x-k}{m}$ nie ma rozwiązania, gdy $m \neq 0$, $k \neq 0$ i $m = 2k$.
- Równanie nie ma sensu liczbowego, gdy $m = 0 \vee k = 0$.

Wskazówka: Zauważ, że po pomnożeniu obu stron równania $\frac{x+m}{k} - \frac{k}{m} = \frac{2x-k}{m}$ przez $m \cdot k$

$$\text{otrzymasz } x = \frac{m^2}{2k-m}.$$

3.30. Warunki zadania są spełnione gdy:

a) $k = -10$, b) $k = -8$, c) $k = 30$.

Wskazówka: Z nierówności $2x - k \leq 10$ wyznacz $x \leq \frac{10+k}{2}$.

a) $x \leq 0$, czyli $x \in (-\infty; 0]$, więc $\frac{10+k}{2} = 0$, skąd $k = -10$.

b) $x \leq 1$, czyli $x \in (-\infty; 1]$, więc $\frac{10+k}{2} = 1$, skąd $k = -8$,

c) $x \leq 20$, czyli $x \in (-\infty; 20]$, więc $\frac{10+k}{2} = 20$, skąd $k = 30$.

3.31. a) Równanie $(m^2 - 9)x^3 + (m - 3)x + 2 = 0$ jest liniowe gdy: $m = -3$.

Wskazówka: Równanie $(m^2 - 9)x^3 + (m - 3)x + 2 = 0$ jest liniowe $\begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m - 3 \neq 0 \end{cases}$, czyli gdy $m = -3$.

3.31. b) Równanie $x(mx - 2x) - x = 5$ jest liniowe, gdy $m = 2$

Wskazówka: Zauważ, że $x(mx - 2x) - x \Leftrightarrow (m - 2)x^2 + x - 5 = 0$,

więc równanie jest liniowe, gdy $m = 2$. Dla $m = 2$ otrzymasz równanie $0 \cdot x^2 + x - 5 = 0$.

3.31. c) Równanie $(3 - mx)x = 4 - mx^2$ jest liniowe gdy $m = 1$.

Wskazówka: Zauważ, że $(3 - mx)x = 4 - x^2 \Leftrightarrow (1 - m)x^2 + 3x - 4 = 0$ równanie jest liniowe, gdy $1 - m = 0$.

3.32. a) Rozwiązaniem nierówności $(2m - 4)x \leq m^2 - 4$ jest każda liczba x taka, że:

- $x \in \left(-\infty; \frac{m+2}{2}\right)$, gdy $m > 2$.
- $x \in \left(\frac{m+2}{2}; +\infty\right)$, $m < 2$.
- $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, gdy $m = 2$.

Wskazówka: Zauważ, że $x = \frac{m^2 - 4}{2(m - 2)} = \frac{(m - 2)(m + 2)}{2(m - 2)} = \frac{m + 2}{2}$, gdy $m \neq 2$.

Rozważ trzy przypadki 1°, 2°, 3°.

1° $2m - 4 > 0$, ($m > 2$), to $x \leq \frac{m^2 - 4}{2m - 4}$, czyli zwrot nierówności nie zmienia się, bo dzielimy obie

jej strony przez $2m - 4 > 0$, więc $x \in \left(-\infty; \frac{m+2}{2}\right)$.

2° $2m - 4 < 0$ ($m < 2$), to $x \geq \frac{m^2 - 4}{2m - 4}$, czyli $x \in \left(\frac{m+2}{2}; +\infty\right)$.

3° Gdy $m = 2$, to nierówność $(2m - 4)x \leq m^2 - 4$ ma postać $0 \cdot x \leq 0$ ($0 = 0$), czyli $0 < 0$ lub $0 = 0$, więc nierówność ma nieskończenie wiele rozwiązań tzn., że $x \in \mathbf{R}$.

3.32. b) Rozwiązaniem nierówności $(m+1)x + 4 < (3-2m)x - 1$ równoważnej $(3m-2)x + 5 < 0$ jest każda liczba x taka, że:

- $x \in \left(-\infty; \frac{-5}{3m-2}\right)$, gdy $m > \frac{2}{3}$.
- $x \in \left(\frac{-5}{3m-2}; +\infty\right)$, gdy $m < \frac{2}{3}$.
- Nierówność $(m+1)x + 4 < (3-2m)x - 1$ nie ma rozwiązania, gdy $m = \frac{2}{3}$.

Wskazówka: Rozwiązanie nierówności $(3m-2)x < -5$ polega na rozważeniu trzech przypadków **1°**, **2°**, **3°**.

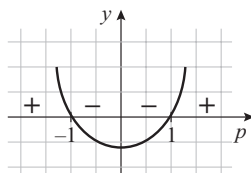
1° Jeśli $3m-2 > 0$, to $\left(m > \frac{2}{3}\right)$ i $x < \frac{-5}{3m-2}$, czyli $x \in \left(-\infty; \frac{-5}{3m-2}\right)$, gdy $m > \frac{2}{3}$.

2° Jeśli $3m-2 < 0$, to $\left(m < \frac{2}{3}\right)$ i $x > \frac{-5}{3m-2}$, czyli $x \in \left(\frac{-5}{3m-2}; +\infty\right)$, gdy $m < \frac{2}{3}$.

3° Jeśli $3m-2 = 0$, to $m = \frac{2}{3}$ i nierówność $(3m-2)x + 5 < 0$ przyjmuje postać: $0 \cdot x + 5 < 0$ – *falsz*, czyli nierówność nie ma rozwiązania.

3.33. Rozwiązaniem nierówności $p(px+1) < x+1$ równoważnej nierówności $(p^2-1)x < 1-p$ jest

każda liczba x taka, że:



$$\frac{1-p}{p^2-1} = \frac{-(p-1)}{(p+1)(p-1)}$$

- $x \in \left(\frac{-1}{p+1}; +\infty\right)$, gdy $p \in (-1; 1)$.
- $x \in \left(-\infty; \frac{-1}{p+1}\right)$, gdy $p < -1$ lub $p > 1$ czyli gdy $p \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
- $x \in \mathbf{R}$, gdy $p = -1$, ponieważ nierówność ma postać $0x < 2$ (nierówność zawsze prawdziwa).
- Nierówność nie ma rozwiązania, gdy $p = 1$.

Wskazówka: Rozważ cztery przypadki **1°**, **2°**, **3°**, **4°**.

1° $p \in (-1; 1)$.

2° $p \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

3° $p = -1$.

4° $p = 1$.

3.34. $m \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; +\sqrt{2})$.

Wskazówka: $0 < \sin x < 1$, gdy $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, więc $0 < m^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 1 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \\ m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$.

3.35. Rozwiązaniem nierówności jest każda liczba z przedziału: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$,

czyli każda liczba spełniająca nierówność jest ujemna.

Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia, że gdy $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$,

czyli $|1-x|^2 > |x+2|^2 \Leftrightarrow -6x > 3 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

3.36. $\begin{cases} x = \frac{m}{m^2-2} \\ y = \frac{-1}{m^2-2} \end{cases}$, gdy $m^2 - 2 \neq 0$, czyli rozwiązanie układu istnieje, gdy $m \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

3.37. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} mx - 2y = 3 \\ x + my = 4 \end{cases}$ jest para liczb $\begin{cases} x = \frac{3m+8}{m^2+2} \\ y = \frac{4m-3}{m^2+2} \end{cases}$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

Para liczb x i y mają różne znaki, gdy $x \cdot y < 0$, czyli gdy $m \in \left(-\frac{8}{3}; \frac{3}{4}\right)$.

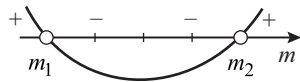
Wskazówka: Rozwiąż układ metodą podstawiania.

$x = \frac{3m+8}{m^2+2}$ dla $m \in \mathbb{R}$ i $y = \frac{4m-3}{m^2+2}$, dla $m \in \mathbb{R}$.

Liczby x i y są różnych znaków, gdy $x \cdot y < 0$,

czyli gdy $\frac{3m+8}{m^2+2} \cdot \frac{4m-3}{m^2+2} < 0 / \cdot (m^2+2)^2$, gdzie $m \in \mathbb{R}$,

czyli rozwiązując nierówność $(3m+8) \cdot (4m-3) < 0$, gdy $m \in \left(-\frac{8}{3}; \frac{3}{4}\right)$ obliczysz m .



3.38. Układ równań $\begin{cases} 3x + my = 1 \\ mx + 12y = 2 \end{cases}$ jest oznaczony, gdy $m \neq 6$ i $m \neq -6$,

Wskazówka: Rozwiązując układ, otrzymujesz $x = \frac{12-2m}{36-m^2}$ i $y = \frac{6-m}{36-m^2}$,

czyli układ jest oznaczony, gdy $m \neq 6$ i $m \neq -6$

3.39. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x - y = -1 - m \\ 2x - y = 2m \end{cases}$ jest para liczb $\begin{cases} x = 3m + 1 \\ y = 4m + 2 \end{cases}$.

- Punkt $P = (x, y)$ należy do prostej o równaniu $y = 3x - 4$, dla $m = \frac{3}{5}$.

Wskazówka: Do równania $y = 3x - 4$ podstaw współrzędne punktu P i rozwiąż otrzymane równanie.

3.40. a) Warunek $|x| \leq \frac{1}{2}$ i $|y| \leq \frac{1}{2}$ jest spełniony, gdy $m \in \left(-\frac{3}{8}; \frac{7}{8}\right)$.

Wskazówka: Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = m \\ 3x + 2y = 2m - 1 \end{cases}$ jest para liczb

Warunek $|x| \leq \frac{1}{2}$ i $|y| \leq \frac{1}{2}$ jest równoważny układowi $\begin{cases} |x| \leq \frac{1}{2} \\ |y| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ gdy $m \in \left(-\frac{3}{8}; \frac{7}{8}\right)$, co możesz zapisać używając symboli logicznych

$$\begin{cases} |x| \leq \frac{1}{2} \\ |y| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \frac{4m-1}{5} \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq \frac{m+1}{5} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2} \leq 4m-1 \leq \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \leq m+1 \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{3}{8}; \frac{7}{8}\right).$$

3.40. b) Warunek $|x + y| > 2$ jest spełniony, gdy $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Wskazówka: Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = m \\ 3x + 2y = 2m - 1 \end{cases}$ jest para liczb $\begin{cases} x = \frac{4m-1}{5} \\ y = \frac{m+1}{5} \end{cases}$, gdy $m \in \mathbf{R}$.

Warunek $|x + y| = \left| \frac{4m-1}{5} + \frac{m+1}{5} \right| > 2$, gdy $m \in \mathbf{R}$ jest równoważny warunkowi

$$\left| \frac{3m-1}{5} + \frac{m+1}{5} \right| > 2 \Leftrightarrow \left| \frac{5m}{5} \right| > 2 \Leftrightarrow |m| > 2 \Leftrightarrow m < -1 \vee m > 2 \text{ czyli, gdy } m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty).$$

3.40. c) Warunek $|x| + |y| \leq 1$ jest spełniony, gdy $m \in \left\langle -1; \frac{1}{4} \right\rangle$ lub $m \in \left\langle \frac{1}{4}; 1 \right\rangle$, czyli $m \in \langle -1; 1 \rangle$.

Wskazówka: Korzystając z definicji wartości bezwzględnej otrzymasz

$$|x| = \begin{cases} -\frac{4m-1}{5}, & \text{gdy } m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \\ \frac{4m-1}{5}, & \text{gdy } m \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right) \end{cases} \text{ i } |y| = \begin{cases} -\frac{m+1}{5}, & \text{gdy } m \in (-\infty; -1) \\ \frac{m+1}{5}, & \text{gdy } m \in [-1; +\infty) \end{cases}, \text{ więc}$$

$$|x| + |y| \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -1) \\ -\frac{4m-1}{5} - \frac{m+1}{5} \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} m \in \left\langle -1; \frac{1}{4} \right\rangle \\ -\frac{4m-1}{5} + \frac{m+1}{5} \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} m \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right) \\ -\frac{4m-1}{5} + \frac{m+1}{5} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \in \emptyset \vee m \in \left\langle -1; \frac{1}{4} \right\rangle \vee m \in \left[\frac{1}{4}; 1\right),$$

czyli $m \in \left\langle -1; \frac{1}{4} \right\rangle \cup m \in \left[\frac{1}{4}; 1\right)$, czyli $m \in \langle -1; 1 \rangle$.

Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

3.41. $p \in (-3; 1) \cup (1; 2)$.

Wskazówka: Warunki zadania są spełnione, gdy $p \neq 1$ i $\Delta > 0$.

3.42. $p = 2, q = -1$.

Wskazówka: Liczby p i q są pierwiastkami równania, więc $\begin{cases} p^2 + (1-p)p - q - 3 = 0 \\ q^2 + (1-p)q - q - 3 = 0 \end{cases}$, skąd $\begin{cases} p - q = 3 \\ q^2 - pq = 3 \end{cases}$.

3.43. **Wskazówka:** Wyróżnik $\Delta = (m-4)^2$, więc $x_1 = -2, x_2 = -m+2$. Z warunków zadania $m \in \mathbf{Z}$, więc $x_1 \in \mathbf{Z}, x_2 \in \mathbf{Z}$.

3.44. $m = 2$, trójmian $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$.

Wskazówka: $\Delta = 0$, gdzie $\Delta = 16m - 32$.

3.45. $p = 2$ lub $p = \frac{9}{4}$.

Wskazówka: Po dodaniu stronami równań $3m^2 + 5m + 4 - p = 0$

i $n^2 - 5n + 4 + p = 0$ otrzymasz równanie $3m^2 + n^2 + 5m - 5n + 8 = 0$. Z warunku zadania $n = 1 - 3m$.

Zatem równanie ma postać $12m^2 + 14m + 4 = 0$, którego pierwiastkami są liczby $m_1 = -\frac{2}{3}, m_2 = -\frac{1}{2}$.

3.46. Wskazówka: Równanie $x^2 + px + q = 0$ ma rozwiązanie, gdy wyróżnik $\Delta_1 \geq 0$, gdzie $\Delta_1 = p^2 - 4q$. Równanie $x^2 + mx + n = 0$ ma rozwiązanie, gdy wyróżnik $\Delta_2 \geq 0$, gdzie $\Delta_2 = m^2 - 4n$.

Z warunku zadania $mp = 2(n + q)$, więc $n = \frac{mp - 2q}{2}$. Zatem $\Delta_2 = m^2 - 4 \cdot \frac{mp - 2q}{2} = m^2 - 2mp + 4q = (m^2 - 2mp + p^2) - p^2 + 4q = (m - p)^2 - (p^2 - 4q)$, czyli $\Delta_2 = (m - p)^2 - \Delta_1$, stąd $\Delta_1 + \Delta_2 = (m - p)^2$. Ponieważ $(m - p)^2 \geq 0$, więc $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$. Zatem co najmniej jedna z liczb Δ_1, Δ_2 jest nieujemna.

3.47. a) $m = 1$ lub $m = \frac{3}{2}$, **b)** $m = 1$ lub $m = 10$.

Wskazówka: **a)** $mx^2 + m + 3 = x^2 + 2mx \Leftrightarrow (m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$.

Równanie $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ ma jeden pierwiastek, gdy:

1° $m = 1$, więc $0 \cdot x^2 - 2x + 4 = 0$, skąd $x = 2$ (1 pierwiastek)

2° $m \neq 1$ i $\Delta = 0$, gdzie $\Delta = 12 - 8m$.

Wskazówka: **b)** Równanie $x^2 + 2(1 - \log m)x + 1 - \log^2 m = 0$ ma jeden pierwiastek, gdy $\Delta = 0$,

gdzie $\Delta = 8 \log m (\log m - 1) = 0 \Leftrightarrow \log m = 0 \vee \log m = 1 \Leftrightarrow m = 10^0 \vee m = 10^1$.

3.48. a) $m \in \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$, **b)** $m \in \left(-\infty; \frac{2}{5}\right) \cup \langle 1; +\infty \rangle$.

Wskazówka: **a)** Równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$ nie ma rozwiązań, gdy

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \text{ (dla równań kwadratowych) lub } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \text{ (dla równań liniowych).}$$

$$\begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ 8m^2 - 20m - 12 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m + 1 = 0 \\ -4m = 0 \\ 2m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \in \left(-\frac{1}{2}; 3\right) \end{cases} \vee \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \\ m \neq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}; 3\right).$$

3.48. b) **Wskazówka:** Równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$ ma rozwiązania, gdy $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ c \in \mathbf{R} \end{cases}$

$$\begin{cases} m + 2 \neq 0 \\ 20m^2 - 28m + 8 \geq 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} m + 2 = 0 \\ 6m \neq 0 \end{cases}, \text{ gdy } \begin{cases} m \neq -2 \\ m \in \left(-\infty; \frac{2}{5}\right) \cup \langle 1; +\infty \rangle \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} m = -2 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

$$3.49. k \in \left(-\infty; \frac{16-2\sqrt{19}}{15}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{16+2\sqrt{19}}{15}; +\infty\right).$$

Wskazówka: Gdy $2k-1=0$ równanie jest równaniem liniowym mającym jedno rozwiązanie $x=4$.

Gdy $2k-1 \neq 0$ równanie jest równaniem kwadratowym mającym nie więcej niż jeden pierwiastek, gdy

$$\Delta \leq 0. \begin{cases} k \neq \frac{1}{2} \\ -15k^2 + 32k - 12 \leq 0 \end{cases}, \text{ skąd } k \leq \frac{16-2\sqrt{19}}{15} \text{ lub } k \geq \frac{16+2\sqrt{19}}{15}.$$

$$3.50. m = \frac{9}{2}.$$

Wskazówka: Równanie $mx+3=0$ ma rozwiązanie $x=-\frac{3}{m}$, gdy $m \in \mathbf{R}$ i $m \neq 0$.

Równanie kwadratowe postaci $ax^2+bx+c=0$ ma rozwiązanie, gdy $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$, czyli $\begin{cases} m-3 \neq 0 \\ (m-2)^2 - 4(m-3) \geq 0 \end{cases}$,

więc $m \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$. Oba równania mogą mieć wspólny pierwiastek, gdy $m \in \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$. Rozwiązanie równania

liniowego $x = -\frac{3}{m}$ jest jednocześnie pierwiastkiem równania kwadratowego, gdy liczba $-\frac{3}{m}$ spełnia

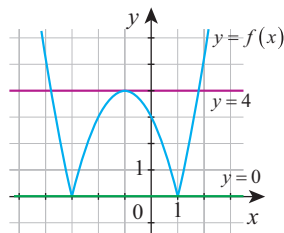
to równanie kwadratowe, czyli $(m-3) \cdot \left(-\frac{3}{m}\right)^2 + (m-2) \cdot \left(-\frac{3}{m}\right) + 1 = 0$, stąd $m=3$ lub $m=\frac{9}{2}$.

3.51. Równanie ma:

- 0 pierwiastków, gdy $m \in (-\infty; 0)$
- 2 pierwiastki, gdy $m \in \{0\} \cup (4; +\infty)$,
- 3 pierwiastki, gdy $m=4$,
- 4 pierwiastki, gdy $m \in (0; 4)$.

Wskazówka: Metoda graficzna: W układzie współrzędnych naszkicuj

wykresy funkcji f i g , gdzie



$$f(x) = |x^2 + 2x - 3| = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & \text{gdy } x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ -(x^2 + 2x - 3), & \text{gdy } x^2 + 2x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & \text{gdy } x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \\ -(x^2 + 2x - 3), & \text{gdy } x \in (-3; 1) \end{cases},$$

$$g(x) = m \text{ i } m \in \mathbf{R}.$$

Wykresem funkcji g jest prosta równoległa do osi x .

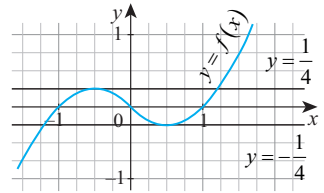
3.52. Równanie ma:

- 1 rozwiązanie, gdy $k \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$,
- 2 rozwiązania, gdy $k \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$,
- 3 rozwiązania, gdy $k \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

Wskazówka: Metoda graficzna: Równanie $x \cdot |x| = x + k$ zapisz

w postaci $\underbrace{x \cdot |x|}_{f(x)} - x = \underbrace{k}_{g(x)}$ i naszkicuj wykresy funkcji f i g ,

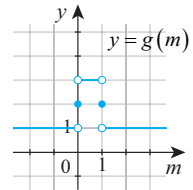
$$\text{gdzie } f(x) = \begin{cases} x(x-1), & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x(x+1), & \text{gdy } x < 0 \end{cases}.$$



Z rysunku odczytaj rozwiązanie zadania.

3.53. Równanie ma:

- 1 rozwiązanie, gdy $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$,
- 2 rozwiązania, gdy $m \in \{0, 1\}$,
- 3 rozwiązania, gdy $m \in (0; 1)$.

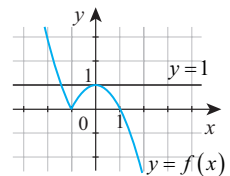


Wskazówka: Lewą stronę równania zapisz w postaci

$$(1-x) \cdot |x+1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{dla } x \geq -1 \end{cases} \text{ i naszkicuj wykresy funkcji } f \text{ i } h, \text{ gdzie } f(x) = (1-x) \cdot |x+1| \text{ i } h(x) = m.$$

Funkcję g przyporządkowującą parametrowi m liczbę rozwiązań równania możesz

$$\text{zapisać w postaci: } g(m) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \\ 2, & \text{gdy } m \in \{0, 1\} \\ 3, & \text{gdy } m \in (0; 1) \end{cases}.$$



3.54. a) $m \in (-1; 5 - 4\sqrt{2})$, b) $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, c) $m \in (1; 5)$.

Wskazówka: a) Pierwiastki x_1 i x_2 równania postaci $x^2 + bx + c = 0$ są liczbami ujemnymi, gdy spełnione są warunki:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m - 7 \geq 0 \\ \frac{m+1}{2} > 0 \\ \frac{m-1}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 5 - 4\sqrt{2}) \cup (5 + 4\sqrt{2}; +\infty) \\ m > -1 \\ m < 1 \end{cases}.$$

Wskazówka: b) Równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki x_1 i x_2 jednakowych znaków,

gdy spełnione są warunki:
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + m - 1 \neq 0 \\ 49m^2 + 14m + 1 \geq 0 \\ \frac{-6}{2m^2 + m - 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \wedge m \neq \frac{1}{2} \\ m \in \mathbf{R} \\ m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \end{cases}.$$

Wskazówka: c) Pierwiastki x_1 i x_2 równania kwadratowego postaci $x^2 + bx + c = 0$ są przeciwnych znaków,

gdy spełnione są warunki:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 14m + 5 > 0 \\ m^2 - 6m + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\frac{1}{3}; 5\right) \\ m \in (1; 5) \end{cases}.$$

3.55. $m = \frac{1}{4}$ i suma kwadratów pierwiastków równania ma wartość najmniejszą równą $2\frac{3}{4}$.

Wskazówka: Zauważ, że $\Delta > 0$, gdy $m \in \mathbf{R}$ ($\Delta = 4m^2 + 5$) oraz,

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 2m + 3.$$

Oblicz wartość najmniejszą funkcji $f(m) = 4m^2 - 2m + 3$, czyli $m = \frac{-(-2)}{2 \cdot 4}$.

3.56. Równanie:

- nie ma rozwiązań, gdy $m \in \left(-3\frac{1}{3}; 1\right)$,
- ma jedno rozwiązanie, gdy $m \in \left\{-3\frac{1}{3}, 1, 5\right\}$,
- ma dwa rozwiązania, gdy $m \in \left(-\infty; -3\frac{1}{3}\right) \cup (1; 5) \cup (5; +\infty)$.

Liczba 1 zawiera się między pierwiastkami równania $m \in \left(-\infty; -3\frac{1}{2}\right) \cup (5; +\infty)$.

Wskazówka: Aby liczba 1 zawierała się między różnymi pierwiastkami równania,

to funkcja kwadratowa $f(x) = (m-5)x^2 - 4mx + x - 2$

powinna mieć dwa różne miejsca zerowe

i jej wykres powinien wyglądać, jak na rysunkach.

Korzystając z wykresów, otrzymasz

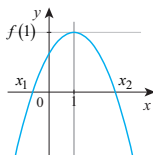
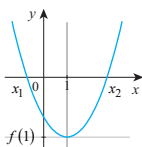
$$\text{alternatywę układów: } \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ 4(3m^2 + 7m - 10) > 0 \\ -2m - 7 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m > 5 \\ 4(3m^2 + 7m - 10) > 0 \\ -2m - 7 < 0 \end{cases}.$$

3.57. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Wskazówka: Warunki zadania są spełnione dla $a = m(m+1)$, $\Delta = 4m(m+1)^2$, $f(1) = 4m^2 + 3m - 1$, gdy:

$$1^\circ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad 2^\circ \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$$

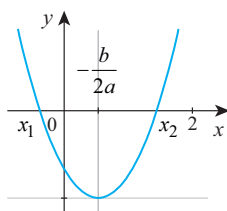


Zauważ, że układ 2° nie ma rozwiązania.

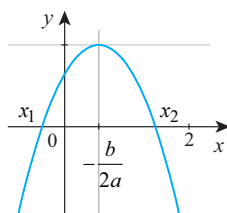
3.58. $m \in (1; \sqrt{2})$.

Wskazówka: Równanie

spełnia warunek zadania, gdy wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = (m+1)x^2 - 2x + m - 1$ jest parabola przedstawiona na rysunkach.



lub



Stąd otrzymasz alternatywę układów:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a > 0 \\ f(0) > 0 \\ f(2) > 0 \\ 0 < -\frac{b}{2a} < 2 \end{cases} \vee \begin{cases} \Delta > 0 \\ a < 0 \\ f(0) < 0 \\ f(2) < 0 \\ 0 < -\frac{b}{2a} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(2-m^2) > 0 \\ m+1 > 0 \\ m-1 > 0 \\ 5m-1 > 0 \\ 0 < \frac{1}{m+1} < 2 \end{cases} \vee \begin{cases} 4(2-m^2) > 0 \\ m+1 < 0 \\ m-1 < 0 \\ 5m-1 < 0 \\ 0 < \frac{1}{m+1} < 2 \end{cases}$$

3.59. $m \in (-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3)$.

Wskazówka: Z warunków zadania: $\Delta > 0$ i $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$, gdzie $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

oraz $x_1 + x_2 = -m$ i $x_1 \cdot x_2 = 2$.

3.60. a) $m \in (-\infty; -18) \cup (14; +\infty)$,

b) $m \in (-\infty; -4)$.

Wskazówka: b) Jeśli $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 > m \\ x_2 > m \end{cases}$, to $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 2m \end{cases}$.

3.61. $m \in (0; 1) \cup (2; 3)$.

Wskazówka: Z warunków zadania: $\Delta > 0$ i $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$, gdzie

$$\Delta = 4m^3 - 8m^2 - 4m + 8 = 4(m-2)(m^2 - 1), \quad (x_1 - x_2)^2 = [x_1^2 + x_2^2] - 2x_1x_2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

i $x_1 + x_2 = 4m$ oraz $x_1x_2 = -m^3 + 6m^2 + m - 2$.

Rozwiąż układ nierówności: $\begin{cases} 4(m-2)(m^2 - 1) > 0 \\ 4m^3 - 8m^2 - 12m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1; 1) \cup (2; +\infty) \\ m \in (-\infty; -1) \cup (0; 3) \end{cases}$.

3.62. $m \in (0; 3 - \sqrt{7})$.

Wskazówka: Z warunków zadania: $\Delta > 0$ i $x_1x_2 \leq 6m$ i $x_1^2 + x_2^2 \geq 6m$, gdzie

$$\Delta = 4 - 4m, \quad x_1 \cdot x_2 = m^2 - m, \quad x_1^2 + x_2^2 = m^2 - 6m + 2. \text{ Rozwiąż układ nierówności } \begin{cases} 4 - 4m > 0 \\ m^2 - 7m \leq 0 \\ m^2 - 6m + 2 \geq 0 \end{cases}.$$

3.63. $m=1$ lub $m=5$.

Wskazówka: $m=1$ lub $\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta = 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$.

3.64. $m = \frac{169}{9}$.

Wskazówka: Z warunków zadania: $\Delta > 0$ i $x_2 = 2x_1$, gdzie $\Delta = 169 - 8m$ oraz $x_1 + x_2 = \frac{13}{2}$.

Z układu równań $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{13}{2} \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$ oblicz $x_1 = \frac{13}{6}$ i $x_2 = \frac{13}{3}$.

Równanie możesz zapisać w postaci $2\left(x - \frac{13}{6}\right)\left(x - \frac{13}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 13x + \frac{169}{9} = 0$, skąd $m = \frac{169}{9}$.

3.65. $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

Wskazówka: Dla równania kwadratowego postaci $ax^2 + bx + c = 0$ warunki zadania są spełnione, gdy:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1 \\ c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \neq 0 \\ -15m^2 - 10m + 5 > 0 \\ c \neq 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m \in \left(-1; \frac{1}{3}\right) \\ m \neq -\frac{1}{2} \\ m \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right) \end{cases}$$

3.66. Równanie:

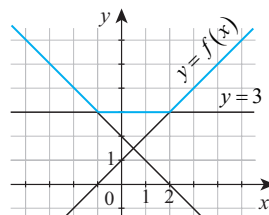
- nie ma rozwiązania, gdy $p \in (-\infty; 3)$,
- ma dwa rozwiązania, gdy $p \in (3; +\infty)$,
- ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $p = 3$.

Wskazówka: W układzie współrzędnych szkicujemy

wykres dwóch funkcji f i g ,

gdzie $f(x) = |x+1| + |x-2| = \begin{cases} -2x+1, & \text{gdy } x < -1 \\ 3, & \text{gdy } -1 \leq x < 2 \\ 2x-1, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$ i $g(x) = p$.

(czyli prostą równoległą do osi x) i odczytujemy z rysunku ile punktów wspólnych ma wykres funkcji f z wykresem funkcji g .



3.67. **Wskazówka:** Przyjmij $f(x) = |x+4| + |x-5| = \begin{cases} -2x+1, & \text{gdy } x < -4 \\ 9, & \text{gdy } -4 \leq x < 5 \text{ i } g(x) = 2x-1. \\ 2x-1, & \text{gdy } x \geq 5 \end{cases}$

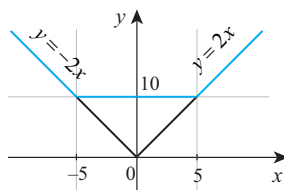
Wykres funkcji f pokrywa się z wykresem funkcji g , gdy $x \in \langle 5; +\infty \rangle$,

więc równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

3.68. $m_1 = -2$, $m_2 = 2$.

Wskazówka: Przyjmij $g(x) = ax$

oraz $f(x) = |x+5| + |x-5| = \begin{cases} -2x, & \text{gdy } x \in (-\infty; -5) \\ 10, & \text{gdy } x \in \langle -5; 5 \rangle \\ 2x, & \text{gdy } x \in \langle 5; +\infty \rangle \end{cases}$



i naskicuj wykres funkcji f .

Równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie, gdy wykresy funkcji f i g

mają co najmniej jeden punkt wspólny.

3.69. $m \in (4; +\infty)$.

Wskazówka: Równanie zapisz w postaci $(m^2 - 16)x = m + 4$.

Gdy $m^2 - 16 \neq 0$ równanie ma jedno rozwiązanie postaci $x = \frac{1}{m-4}$.

$$x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m-4} > 0 \Leftrightarrow m > 4.$$

3.70. $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Wskazówka: Równanie ma dwa rozwiązania, gdy prawa strona tego równania jest dodatnia.