

12. Rachunek różniczkowy – odpowiedzi i wskazówki

Granica funkcji

12.1. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $-\infty$, d) $-\infty$, e) $+\infty$, f) 0.

12.2. a) 2, b) 1, c) $-\infty$, d) $+\infty$, e) $\sqrt{3}$, f) $-\sqrt{3}$.

Wskazówka: e), f) $\frac{\sqrt{3x^2+2}}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x|\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{x}$. $|x|=x$, gdy $x \rightarrow +\infty$ i $|x|=-x$, gdy $x \rightarrow -\infty$.

12.3. a) -3, b) $+\infty$, c) 0, d) -1, e) -3, f) $\frac{4}{3}$.

Wskazówka: e) $\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-2x} = \frac{(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-2x}) \cdot (\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-2x})}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-2x}} =$
 $= \frac{6x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)},$

f) korzystając z wzoru $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, gdzie $a=\sqrt[3]{(x+1)^2}$ i $b=\sqrt[3]{(x-1)^2}$,

otrzymamy $\sqrt[3]{x} \cdot \left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right) = \frac{\sqrt[3]{x}[(x+1)^2-(x-1)^2]}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}} =$
 $= \frac{4\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}\right)}.$

12.4. a) 5, b) $-\frac{1}{2}$, c) 1, d) $-\frac{5}{7}$, e) -3, f) $\frac{5}{13}$.

12.5. a) 4, b) 0, c) 27, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{4}{5}$, f) $-\frac{9}{4}$.

12.6. a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ i $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$, więc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$,

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 4$ i $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 5$, więc funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = -1$,

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$ i $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$, więc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$,

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$, więc funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 2$.

12.7. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $+\infty$, d) $-\infty$, e) $+\infty$, f) $+\infty$.

$$12.8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+4) = 6, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2+2) = 6,$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{1}{2},$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0,$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0,$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{4}.$$

Wskazówka: $\text{f) } \frac{4x^2 - 7x + 3}{4x - 4} = \frac{(x-1)(4x-3)}{4(x-1)} = \frac{4x-3}{4}.$

$$12.9. \text{ a) Tak, } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2, \quad \text{b) tak, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1, \quad \text{c) nie,} \quad \text{d) tak, } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{1}{4}.$$

Wskazówka: Granica funkcji f w punkcie x_0 istnieje, jeśli spełniony jest warunek

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

$$12.10. \text{ a) } 2, \quad \text{b) } \frac{1}{2}, \quad \text{c) } 2, \quad \text{d) } -\infty,$$

$$\text{e) } -1, \quad \text{f) } 1, \quad \text{g) } -\frac{1}{3}, \quad \text{h) } \frac{1}{12}.$$

Wskazówka: $\text{g) } \frac{6-2\sqrt{x}}{x-9} = \frac{-2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}, \quad \text{h) } \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-1} = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x+3}+2)} =$

$$= \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x+3}+2)}.$$

$$12.11. \text{ a) Tak,} \quad \text{b) nie.}$$

Wskazówka: $\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1 \text{ i } \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1, \text{ więc } \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x),$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0 \text{ i } \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1, \text{ więc } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x).$$

12.12. Wskazówka: Funkcja f nie ma granicy w punkcie x_0 , gdy $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x),$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^3} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^3} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty. \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty,$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3+x+1}{x^2-4} = \left[\frac{11}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3+x+1}{x^2-4} = \left[\frac{11}{0^+} \right] = +\infty.$$

- 12.13. a) $k = \frac{1}{2}$, b) $k = -9$, c) $k = -2\sqrt{3}$ lub $k = 2\sqrt{3}$, d) $k = 1$.

Wskazówka: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(k+1)x^2 + 3x + 1}{kx^2 + 4} = \frac{k+1}{k}$.

- 12.14. a) x_1 , b) x_2, x_3, x_4 .

Wskazówka: a) $\lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) = 3 = f(x_1)$,

- b) $\lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_2^+} f(x) = 3$ (nie istnieje granica funkcji f w punkcie x_2),

$\lim_{x \rightarrow x_3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow x_3^+} f(x) = 2$, więc $\lim_{x \rightarrow x_3} f(x) = 2$ i $f(x_3) = 5$ (istnieje granica funkcji f w punkcie x_3),

$\lim_{x \rightarrow x_4^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow x_4^+} f(x) = 4$ (nie istnieje granica funkcji f w punkcie x_4).

Ciągłość funkcji

- 12.15. Funkcje w a), b), c), e) są ciągłe.

Wskazówka: a) $f(1) = -2$ i $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -2$,

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 = f(1)$,

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+3) = 2+3=5$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x^2+1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$, $f(1) = 5$,
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$,

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1$, nie istnieje granica funkcji f w punkcie $x_0 = 1$,

e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} 3^x = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = 3$, $f(1) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$,

f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1)^{-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0$, nie istnieje granica funkcji f w punkcie $x_0 = 1$.

- 12.16. a) $m = -2$, b) $m = 5$, c) $m = -2$, d) $m = 9$.

Wskazówka: a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2$, zatem $f(-1) = m = -2$.

12.17. a) $k_1 = 2 - \sqrt{2}$, $k_2 = 2 + \sqrt{2}$,

b) $k = 5$,

c) $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{2}{3}$,

d) $k = 0$,

e) $k_1 = 0$, $k_2 = 2$,

f) $k = 0$.

Wskazówka: a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - k)^2 = (2 - k)^2$ i $\lim_{x \rightarrow 1^+} (3^x - 1) = 2$ oraz $f(1) = 2$, więc $(2 - k)^2 = 2$,

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$ i $f(3) = 2k - 4$, więc $2k - 4 = 6$,

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{-(x - 1)} = -3$ i $f(1) = 6k^2 - k - 5$, więc $6k^2 - k - 5 = -3$.

12.18. **Wskazówka:** Skorzystaj z twierdzenia Darboux o przyjmowaniu wartości pośredniej.

Wyznacz takie argumenty x , dla których:

$f(x) < 5$	$f(x) > 5$
$f(1) = 1^6 - 2 \cdot 1^4 - 1^3 + 1 = -1$, czyli $f(1) = -1 < 5$.	$f(0) = 1$ i $1 < 5$ (nie spełnia warunków zadania) $f(2) = 2^6 - 2 \cdot 2^4 - 2^3 + 1 = 25$ i $25 > 5$

Funkcja f jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych, więc w przedziale $\langle 1; 2 \rangle$ przyjmuje wartości pośrednie pomiędzy liczbami -1 i 25 , czyli z przedziału $\langle -1; 25 \rangle$.

$5 \in \langle -1; 25 \rangle$, więc liczba 5 należy do zbioru wartości funkcji f . **cnw.**

12.19. **Wskazówka:** Wystarczy wykazać, że $f(0) \cdot f(1) < 0$.

12.21. **Wskazówka:** Zauważ, że $f(1) = -6$ i $f(2) = 6$, więc $f(1) \cdot f(2) < 0$, czyli funkcja ciągła f ma miejsce zerowe x_0 i $x_0 \in (1; 2)$.

12.22. **Wskazówka:** a) $f(-1) \cdot f(0) < 0$, $f(0) \cdot f(1) < 0$ i $f(1) \cdot f(2) < 0$, więc w każdym z przedziałów $(-1; 0)$, $(0; 1)$ i $(1; 2)$ funkcja f ma miejsce zerowe. Funkcja f jest wielomianem trzeciego stopnia, więc nie może mieć więcej niż trzy miejsca zerowe.

b) $f(-2) \cdot f(-1) < 0$, $f(-1) \cdot f(0) < 0$ i $f(1) \cdot f(2) < 0$, czyli miejsca zerowe znajdują się w przedziałach $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(1; 2)$.

Pochodna funkcji

12.23. a) $f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}, x > 0,$

c) $f'(x) = 3x^5 + \frac{3}{x^2\sqrt{x}}, x > 0,$

e) $f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0,$

g) $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}, x \neq 1,$

i) $f'(x) = 3x^2,$

b) $f'(x) = \frac{9}{2}x^3\sqrt{x}, x \geq 0,$

d) $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{x^3}, x \neq 0,$

f) $f'(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x} + 3x^2, x \geq 0,$

h) $f'(x) = \frac{-x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1}{(x^3 - 1)^2}, x \neq 1,$

j) $f'(x) = \frac{-4x}{(x-2)^3}, x \neq 2.$

12.24. a) $f'(-1) = 0, f'(1) = 0,$

b) $f'(x) > 0$, gdy $x \in (-1; 1)$, $f'(x) < 0$, gdy $x \in (-\infty; -1)$ lub $x \in (1; +\infty)$.

12.25. a) 0, b) $\frac{5}{2}.$

12.26. $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{200}{169}.$

12.27. a) $a = 3,$

b) $a = -1,$

c) $a = 3,$

d) $a = 0.$

Wskazówka: a) $f'(x) = 2x + 1, a = f'(1)$

12.28. a) $k: y = 5x - 4,$

b) $k: y = -5x + 16,$

c) $k: y = 6x + 4,$

d) $k: y = 3x.$

Wskazówka: a) $M = (3, 11), f'(3) = 5,$

b) $M = (2, 6), f'(2) = -5,$

c) $M = \left(-\frac{1}{2}, 1\right), f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 6,$

d) $M = (2, 6), f'(2) = 3.$

12.29. a) $P = (0, -1)$ oraz $P = (-2, 3),$

b) $P = (1, 1)$ oraz $P = \left(\frac{5}{3}, -\frac{13}{27}\right).$

Wskazówka: a) $a = 2 = f'(x_0)$, czyli $x_0 = 0$ lub $x_0 = -2$, więc $f(0) = -1$ oraz $f(-2) = 3,$

b) $a = -2 = f'(x_0)$, czyli $x_0 = 1$ lub $x_0 = \frac{5}{3}$, więc $f(1) = 1, f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{13}{27}.$

12.30. a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{26}{27}$,

b) $y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{9}$ lub $y = \frac{2}{9}x + \frac{23}{9}$.

Wskazówka: a) $a = f'(x_0) = \frac{2}{3}$, punkt styczności $P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{20}{27}\right)$.

12.31. a) $x - y = 0$ oraz $12x - 12y + 1 = 0$,

b) $x - 2y + 5 = 0$ oraz $x - 2y - 3 = 0$.

Wskazówka:

a) $a = f'(x_0) = -3$, punkty styczności $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = \left(-1, -\frac{11}{12}\right)$,

b) $a = f'(x_0) = \frac{1}{2}$, punkty styczności $P_1 = (-1, 2)$, $P_2 = (3, 0)$.

12.32. a) $x + y - 9 = 0$ lub $x + y + \frac{5}{3} = 0$,

b) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{32}$.

Wskazówka: Punkt styczności: a) $M = (-3, 12)$ lub $M = \left(1, -\frac{8}{3}\right)$, b) $M = \left(\frac{1}{2}, -\frac{15}{32}\right)$

12.33. a) $y = 3$ i $y = -6x$,

b) $P = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

Wskazówka: a) $M = (-2, 3)$, $N = (1, -6)$.

12.34. $c = \frac{1}{4}$.

Wskazówka: $-x^2 + c = 0$, skąd $x = \sqrt{c}$ lub $x = -\sqrt{c}$. Zatem styczne do paraboli prowadzimy w punktach $A = (-\sqrt{c}, 0)$ i $B = (\sqrt{c}, 0)$. Współczynnik kierunkowy m_1 stycznej do paraboli w punkcie A ma wartość $f'(-\sqrt{c})$, czyli $f'(-\sqrt{c}) = -2 \cdot (-\sqrt{c}) = 2\sqrt{c}$. Współczynnik kierunkowy m_2 stycznej do paraboli w punkcie B ma wartość $f'(\sqrt{c}) = -2\sqrt{c}$. Styczne są prostopadłe, gdy $m_1 \cdot m_2 = -1$, czyli gdy $2\sqrt{c} \cdot (-2\sqrt{c}) = -1$, skąd $c = \frac{1}{4}$.

12.35. **Wskazówka:** Równanie paraboli: $y = 2x^2 + x - 1$.

12.36. $P_{\Delta ABC} = \frac{27}{2}$.

Wskazówka: $A = (-2, 3)$, $B = (1, 6)$, $C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

12.37. **Wskazówka:** Obliczamy współrzędne punktów A i B :

$$\begin{cases} y = kx \\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ skąd } A = \left(k - \sqrt{k^2 + 1}, k^2 - k\sqrt{k^2 + 1}\right), B = \left(k + \sqrt{k^2 + 1}, k^2 + k\sqrt{k^2 + 1}\right). \text{ Równania stycz-}$$

nych: $y = a_A x + b_A$ oraz $y = a_B x + b_B$. $f'(x) = x$, więc $a_A = f'(k - \sqrt{k^2 + 1})$ oraz $a_B = f'(k + \sqrt{k^2 + 1})$;

$a_A \cdot a_B = (k - \sqrt{k^2 + 1}) \cdot (k + \sqrt{k^2 + 1}) = k^2 - (k^2 + 1) = -1$. Zatem obie styczne są prostopadłe.

12.38. Wskazówka: a) Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie

$P = (p, p^2)$, więc $a = f'(p) = 2p$. Prosta $y = 2px + b$ przechodzi przez punkt P , więc $b = -p^2$.

Zatem: $x^2 \geq 2px - p^2 \Leftrightarrow (x - p)^2 \geq 0$, więc nierówność $x^2 \geq 2px - p^2$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

b) $P = (p, -2p^2)$, $a = -4p$, $b = 2p^2$.

12.39. $y = 9x - 15$.

Wskazówka: $A = (2, f(2))$. Styczna do wykresu funkcji f ma równanie $y = ax + b$, gdzie $a = f'(2)$.

12.40. a) $p = 0$, $q = -\frac{4}{3}$, **b)** $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle 1; +\infty \rangle \cup \{-2\}$.

12.41. $m = -3$.

Wskazówka: $\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - mx_0 - x_0^3 = 0 \\ -m - 3x_0^2 = 0 \end{cases}$.

12.42. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8$,

a) funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $\langle 4; +\infty \rangle$, funkcja malejąca w przedziale $\langle 0; 4 \rangle$,

b) $f_{MAX} = f(0) = 8$, $f_{MIN} = f(3) = -19$.

12.43. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$, $\langle 0; +\infty \rangle$.

Funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów $\langle -2; -1 \rangle$, $(-1; 0)$,

b) $D_f = \mathbf{R}$. Funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, a malejąca w przedziale $\langle 0; +\infty \rangle$,

c) $D_f = \langle -1; 1 \rangle$. Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $\langle -1; -\sqrt{\frac{2}{3}} \rangle$, $\langle 0; \sqrt{\frac{2}{3}} \rangle$,
a malejąca w przedziałach $\langle -\sqrt{\frac{2}{3}}; 0 \rangle$, $\langle \sqrt{\frac{2}{3}}; 1 \rangle$.

Wskazówka: b) Oblicz pochodną funkcji f i rozwiąż nierówności $f'(x) > 0$ oraz $f'(x) < 0$.

c) Funkcję f zapisz w postaci $f(x) = \sqrt{x^4 - x^6}$. Funkcja postaci $y = \sqrt{t}$, gdzie $t \geq 0$, jest rosnąca, więc wystarczy określić monotoniczność funkcji $g(x) = x^4 - x^6$ w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$.

12.44. a) Funkcja f jest: rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$, $\langle 1; +\infty)$, malejąca w przedziale $\langle -1; 1)$,

$$y_{\min} = f(1) = -2, \quad y_{\max} = f(-1) = 2,$$

b) funkcja f jest: rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -\frac{1}{3})$, $\langle 1; +\infty)$,

$$\text{malejąca w przedziale } \langle -\frac{1}{3}; 1), \quad y_{\min} = f(1) = 0, \quad y_{\max} = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27},$$

c) funkcja f jest: rosnąca w przedziale $\langle -1; +\infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$, $y_{\min} = f(-1) = -7$,

d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, funkcja f jest: rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$, $\langle 1; +\infty)$,

$$\text{malejąca w każdym z przedziałów } \langle -1; 0), \quad (0; 1), \quad y_{\min} = f(1) = 2, \quad y_{\max} = f(-1) = -2,$$

e) $D_f = \mathbf{R}$, funkcja f jest: rosnąca w przedziale $\langle 0; +\infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$,

$$y_{\min} = f(0) = -1,$$

f) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0, 4\}$ funkcja f jest: rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$,

$$\text{malejąca w każdym z przedziałów } \langle 2; 4), \quad (4; +\infty), \quad y_{\max} = f(2) = -\frac{1}{2}.$$

12.45. Wskazówka: **a)** $f'(x) = 3x^2 - 12$, $f'(x) > 0$, gdy $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, więc funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$. Ponieważ $(3; 5) \subset (2; +\infty)$, więc funkcja jest rosnąca w przedziale $(3; 5)$. **cnw.**

b) $f'(x) = 0$, gdy $x = 2$, $f'(x) > 0$, gdy $x < 2$, i $f'(x) > 0$, gdy $x > 2$. **cnw.**

12.46. a) ① $D_f = \langle -2\sqrt{3}; 2\sqrt{3} \rangle$, ② $Y_f = \langle -4; 4 \rangle$, ③ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}\}$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}, \quad ④ \quad y_{\min} = f(-2) = -4, \quad y_{\max} = f(2) = 4, \text{ funkcja } f \text{ jest malejąca}$$

w każdym z przedziałów $\langle -2\sqrt{3}; -2 \rangle$, $\langle 2; 2\sqrt{3} \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$,

b) ① $D_f = \langle -2; 6 \rangle$, ② $Y_f = \langle -7; 0 \rangle$, ③ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 6\}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 5\}$,

$$④ \quad y_{\max} = f(1) = 0, \quad y_{\min} = f(5) = -4, \quad ⑤ \text{ funkcja } f \text{ jest malejąca w przedziale } \langle 1; 5 \rangle, \text{ funkcja } f$$

jest rosnąca w każdym z przedziałów $\langle -2; 1 \rangle$; $\langle 5; 6 \rangle$.

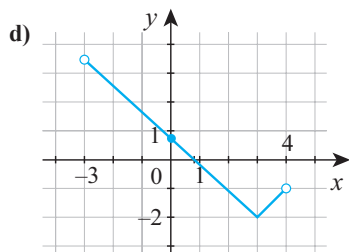
12.47.

x	$(-\infty; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	0	-	0	+	+	+
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0	$\searrow$	min -1	$\nearrow$	max 0	$\searrow$	min -1	$\nearrow$	0	$\nearrow +\infty$

12.48. a) Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-3; 3)$ oraz rosnąca w przedziale $(3; 4)$,

b) $f_{\min}(3) = -2$,

c) $y_{\min} = f(3) = -2$,



12.49. a) Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-2; 1)$, $(3; 5)$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-1; 3)$.

b) $x = -1$, $x = 3$,

c) $f_{\max} = f(-1) = 5$, $y_{\min} = f(3) = 0$,

d)

x	$(-2; -1)$	-1	$(-1; 3)$	3	$(3; 5)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max 5	$\searrow$	min 0	$\nearrow$

12.50. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$,

b) $f'(x) > 0$, gdy $x \in (0; 1)$ lub $x \in (2; 3)$, $f'(x) < 0$, gdy $x \in (-1; 0)$ lub $x \in (1; 2)$,

c) $y_{\min} = f(2) = f(0) = 0$.

12.51. a) $y_{MIN} = f(-2) = -26$, $y_{MAX} = f(0) = 6$,

b) $y_{MIN} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}$, $y_{MAX} = f(0) = -1$,

c) $y_{MIN} = f(-1) = -\frac{1}{2}$, $y_{MAX} = f(3) = \frac{9}{2}$,

d) $y_{MIN} = f(-1) = -\frac{1}{2}$, $y_{MAX} = f(1) = \frac{1}{2}$,

e) $y_{MIN} = f(-2) = -4$, $y_{MAX} = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9}\sqrt{6}$.

Wskazówka: e) $f(-2) = -2\sqrt{4} = -4$ i $f(2) = 0$. Funkcję f zapisz w postaci $f(x) = \sqrt{2x^2 - x^3}$, gdzie

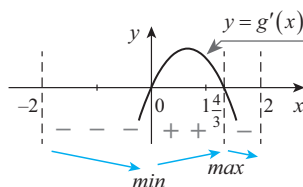
$2x^2 - x^3 = g(x)$. Oblicz ekstrema funkcji g w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$, bo funkcja postaci $y = \sqrt{t}$ jest rosnąca.

Funkcja f ma ekstrema lokalne dla tych x , dla których funkcja g ma

ekstrema.

$g'(x) = 4x - 3x^2$, więc $g'(x) = 0$, gdy $x = 0$ lub $x = \frac{4}{3}$.

$f_{\min} = f(0) = 0$, $f_{\max} = f\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\frac{32}{27}}$.



12.52. a) 1 $x_1 = -6$, $x_2 = 0$, 2 $f'(x) = 3x^2 + 12x$, 3 funkcja f

jest malejąca w przedziale $\langle -4; 0 \rangle$,

funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $\langle -6; -4 \rangle$, $\langle 0; 1 \rangle$,

4 $y_{MIN} = f(-6) = f(0) = 0$, $y_{MAX} = f(-4) = 32$,

5

x	-6	$(-6; -4)$	-4	$(-4; 0)$	0	$(0; 1)$	1
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	0	$\nearrow$	max 32	$\searrow$	min 0	$\nearrow$	7

b) 1 $x_0 = 0$, 2 $f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$, 3 funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -4; 0 \rangle$, funkcja f jest

malejąca w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$, 4 $y_{MIN} = f(-4) = -\frac{8}{3}$, $y_{MAX} = f(0) = 0$,

5

x	-4	$(-4; 0)$	0	$(0; 1)$	1
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	$-\frac{8}{3}$	$\nearrow$	max 0	$\searrow$	-1

12.53. Wskazówka:**I sposób rozwiązania.**

Zauważ, że aby wyznaczyć zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{x+3}{x^2+7}$ wystarczy sprawdzić, dla jakich wartości parametru m ma rozwiązanie równanie $\frac{x+3}{x^2+7} = m$, czyli równanie $mx^2 - x + 7m - 3 = 0$. Dla $m = 0$ równanie $mx^2 - x + 7m - 3 = 0$ ma rozwiązanie $x = -3$.

Dla $m \neq 0$ jest to równanie kwadratowe i wystarczy sprawdzić warunek $\Delta \geq 0$.

$$\Delta \geq 0, \text{ gdy } m \in \left\langle -\frac{1}{14}; 0 \right\rangle \cup \left(0; \frac{1}{2} \right]. \text{ Zatem } Y_f = \left\langle -\frac{1}{14}; \frac{1}{2} \right\rangle.$$

II sposób rozwiązania.

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{x+3}{x^2+7}$ w zbiorze liczb

rzeczywistych. Wyznacz pochodną tej funkcji $f'(x) = \frac{-x^2 - 6x + 7}{(x^2 + 7)^2}$. $f'(x) = 0$, gdy $\frac{-x^2 - 6x + 7}{(x^2 + 7)^2} = 0$, skąd $x_1 = -7$, $x_2 = 1$.

Jeśli $x \in (-\infty; -7)$, to $f'(x) < 0$, jeśli $x \in (-7; 1)$, to $f'(x) > 0$, więc $y_{\min} = f(-7) = -\frac{1}{14}$.

Jeśli $x \in (-7; 1)$, to $f'(x) > 0$, jeśli $x \in (1; +\infty)$, to $f'(x) < 0$, więc $y_{\max} = f(1) = \frac{1}{2}$.

Z ciągłości funkcji f wynika, że $Y_f = \left\langle -\frac{1}{14}; \frac{1}{2} \right\rangle$.

12.54. Wskazówka: Punkt P leżący na wykresie funkcji f ma współrzędne $P = (x, x^2)$. $A = (3, 0)$, więc

$|AP| = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2-0)^2} = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$. Przyjmij $g(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$ i oblicz minimum funkcji g , a następnie podaj minimum funkcji $|AP| = \sqrt{g(x)}$ (funkcja $|AP|$ ma minimum dla tych x , dla których funkcja g ma minimum, ponieważ funkcja postaci $y = \sqrt{t}$ jest rosnąca).

12.55. $P = (1, 1)$.

Wskazówka: Zauważ, że jeżeli $P = (x, x^3)$, to $|AP| = \sqrt{(x-4)^2 + (x^3)^2} = \sqrt{x^6 + x^2 - 8x + 16} = \sqrt{f(x)}$.

Najmniejsza odległość $|AP|$ będzie dla takiego argumentu x , gdzie $x > 0$

(bo $|AP| < |AP_2| < |AP_1|$), dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza,

gdzie $f(x) = x^6 + x^2 - 8x + 16$ (funkcja postaci $y = \sqrt{t}$ jest rosnąca).

$$f'(x) = 6x^5 + 2x - 8 = 2(x-1)(3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4), \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

(liczba 1 jest jedynym dodatnim pierwiastkiem wielomianu f').

Jeśli $x \in (0; 1)$, to $f'(x) < 0$, oraz jeśli $x \in (1; +\infty)$, to $f'(x) > 0$, więc $y_{\min} = f(1) = 1$.

$$12.56. |AB| = 2 - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} = 2 - \frac{3\sqrt[3]{2}}{8}.$$

Wskazówka: Przyjmij $A = (x, x^2 + 2)$, $B = (x, \sqrt{x})$, gdzie $x \geq 0$.

$$|AB| = \sqrt{(\sqrt{x} - x^2 - 2)^2} = x^2 - \sqrt{x} + 2, \quad x \geq 0. \text{ Jeśli } \sqrt{x} = t \text{ i } t \geq 0, \text{ to } f(t) = t^4 - t + 2. \quad f'(t) = 4t^3 - 1.$$

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{16}{4}}.$$

$$\text{Jeśli } t \in \left(0; \sqrt[3]{\frac{16}{4}}\right), \text{ to } f'(t) < 0, \text{ oraz jeśli } t \in \left(\sqrt[3]{\frac{16}{4}}; +\infty\right), \text{ to } f'(t) > 0, \text{ więc } y_{\min} = f\left(\sqrt[3]{\frac{16}{4}}\right) = 2 - \frac{3\sqrt[3]{16}}{16}.$$

Najmniejsza wartość funkcji f jest długością najkrótszego odcinka.

12.57. Wskazówka: Równanie $x^3 - 5x^2 + 20x + 7 = 0$ jest trzeciego stopnia, więc ma co najmniej jedno rozwiązanie na podstawie twierdzenia o pierwiastkach wielomianu stopnia nieparzystego. Jeśli przyjmiemy, że lewa strona równania jest wielomianem W , to $W'(x) = 3x^2 - 10x + 20$. $W'(x) > 0$, gdy $x \in \mathbf{R}$, zatem W jest funkcją rosnącą w zbiorze $\mathbf{R}$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = +\infty$. Zatem wielomian W ma tylko jedno miejsce zerowe, a równanie ma tylko jeden pierwiastek. **c.n.u.**

12.58. Wskazówka: Lewa strona równania jest wielomianem nieparzystego stopnia, więc ma co najmniej jedno rozwiązanie. Zbadaj własności funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^9 - 9x + 15$ za pomocą pochodnej.

$$f'(x) = 9x^8 - 9 = 9(x^8 - 1) = 9(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1) \text{ i } x \in \mathbf{R}.$$

$$f'(x) = 0, \text{ gdy } x = -1 \text{ lub } x = 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0, \text{ gdy } x \in (-\infty; -1) \\ f'(x) < 0, \text{ gdy } x \in (-1; 1) \end{array} \right\} y_{\max} = f(-1) = 23$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0, \text{ gdy } x \in (-1; 1) \\ f'(x) > 0, \text{ gdy } x \in (1; +\infty) \end{array} \right\} y_{\min} = f(1) = 7,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$y_{\max}$ 23	↘	$y_{\min}$ 7	↗ $+\infty$

Wniosek: tylko w przedziale $(-\infty; -1)$ funkcja f zmienia znak wartości z ujemnego na dodatni, czyli funkcja f ma tylko jedno miejsce zerowe w przedziale $(-\infty; -1)$.

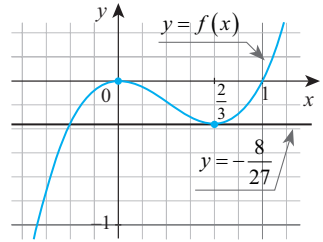
Zatem równanie ma tylko jedno rozwiązanie. **cnnw.**

12.59. Wskazówka: Funkcja f jest ciągła, bo $D_f = \mathbf{R}$. W układzie współrzędnych zaznaczamy charakterystyczne punkty wykresu funkcji f

(miejsca zerowe, ekstrema) oraz granice funkcji f w $-\infty$ i w $+\infty$, czyli:

$$f(x) = 0, \text{ gdy } x = 0 \text{ lub } x = 1, \quad y_{\max} = f(0) = 0, \quad y_{\min} = f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$



Przez punkty: $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $\left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}\right)$ poprowadź krzywą, która jest przybliżonym wykresem funkcji f .

Prosta o równaniu $y = -\frac{8}{27}$ ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji f .

7.60. $m \in (-2; 2)$.

Wskazówka: Zaznacz charakterystyczne punkty wykresu funkcji f i naskicuj jej wykres.

Prosta $y = m$ przecina wykres funkcji f w trzech punktach, gdy $m \in (-2; 2)$.

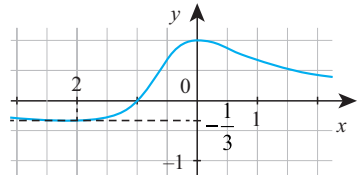
$$\mathbf{12.61.} \quad m \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; 1).$$

Wskazówka: Zaznacz charakterystyczne

punkty wykresu funkcji f i naskicuj jej wykres. Odczytaj z wykresu

wartości parametru m dla których prosta $y = m$ ma z wykresem

funkcji f dwa punkty wspólne.



Zagadnienia optymalizacyjne z elementami rachunku różniczkowego

12.62. 5,5.

Wskazówka: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{10-x}$ i $x \in (0, 10)$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(10-x)^2}$.

12.63. a) $L(1) = 96$,

b) 0°C lub 372°C ,

c) 206°C .

Wskazówka: **b)** $-t^3 - 3t^2 + 25t = 0$, gdy $t = 0$ lub $t = \frac{3 - \sqrt{109}}{-2}$ lub $t = \frac{3 + \sqrt{109}}{-2}$.

Ponieważ $\frac{3 - \sqrt{109}}{-2} \approx 3,72$ i $\frac{3 + \sqrt{109}}{-2} \approx -2,73$, więc $t_1 = 0$ i $t_2 = 100 \cdot 3,72$.

12.64. Przy produkcji 10 sztuk podzespołów koszt wyprodukowania jednego podzespołu będzie najmniejszy i będzie równy 400.

Wskazówka: $P(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{x^3 + 100x + 2000}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{N}^+$.

$$P'(x) = \frac{2x^3 - 2000}{x^2}. \quad P'(x) = 0, \text{ gdy } x = 10.$$

12.65. Po jednej godzinie.

Wskazówka: $f'(t) = \frac{-2(t^2-1)}{(t^2-t+1)^2}$ i $y_{MAX} = f(1)$.

12.66. $a = 36$.

Wskazówka: $a(t) = v'(t) = [s'(t)]'$.

12.67. a) $s(t) = 3t^2$, b) $v(6) = 36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, c) $v_{sr} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Wskazówka: a) $s(t) = at^2$. Z warunku $75 = a \cdot 5^2$ mamy $a = 3$, b) $v(t) = s'(t) = 6t$,

c) $v_{sr} = \frac{s(5) - s(0)}{5} = \frac{75 - 0}{5}$.

12.68. a) $v(t) = s'(t) = 3t^2 + 8t$, b) $a = v'(t) = 6t + 8$, c) $E_k = 5(9t^4 + 48t^3 + 64t^2)$.

12.69. $v(t) = s'(t) = 10t + 20$ – ruch zmienny, $a(t) = v'(t) = 10 = \text{const}$ – ruch jednostajnie przyspieszony.

12.70. O godzinie 10^{00} .

Wskazówka: a) $D_f = \langle 0; 8 \rangle$. Rozwiązanie problemu sprowadza się do wyznaczenia największej wartości funkcji f w przedziale $\langle 0; 8 \rangle$. $f(0) = 300$ – wydajność pracy o godzinie 7^{00} , $f(8) = 251$ – wydajność pracy o godzinie 15^{00} , $f(3) = 333$ – wydajność pracy o godzinie 10^{00} .

12.71. **Wskazówka:** Jeśli $f(x) = \frac{-x^2}{x^2+1}$, to $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$. Ponieważ $(x^2+1)^2 > 0$,

to o znaku pochodnej decyduje licznik $(-2x)$. $-2x < 0$ i, gdy $x > 0$.