

15. Prawdopodobieństwo z elementami kombinatoryki – odpowiedzi i wskazówki

Statystyka

15.1. a) $k > m$, b) $k < m$, c) $k > m$, d) $k = m$,

15.2. a) $n = 3$, b) $n = 2$, c) $n = 5$.

Wskazówka: a) Załóż, że $n \geq 2$ i skorzystaj z wzoru $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,
otrzymasz równanie $\frac{n(n-1)}{2} = n$.

15.3. a) $n = 5$, b) $n = 5$, c) $n = 6$, d) $n = 5$.

Wskazówka: a) Skorzystaj z wzoru $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, gdzie $k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}$, otrzymasz
równanie $2 \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$, gdy $n \geq 2$, czyli $2 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!}$, skąd $n(n-1)(5-n) = 0$.

b) Skorzystaj z wzoru $P_n = n!$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, otrzymasz równanie $20(n-2)! = n!$, gdy $n \geq 2$, czyli
 $20(n-2)! - (n-2)!(n-1)n = 0$, skąd $(n-2)!(20 - n^2 + n) = 0$, czyli $(n-2)!(5-n)(n+4) = 0$.

c) Skorzystaj z wzoru $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, gdzie $k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}$, otrzymasz równanie
 $2 \frac{n!}{(n-2)!} - 3 \frac{n!}{(n-1)!} = 42$, gdy $n \geq 2$, skąd $2n^2 - 5n - 42 = 0$.

15.4. Liczby 2 i 3.

Wskazówka: Z warunków zadania: $\frac{1}{2} \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{n-1} \right] \leq 3$, gdzie $n \geq 2$, skąd $\begin{cases} n^2 + n - 12 \leq 0 \\ n \geq 2 \end{cases}$.

15.5. a) $n \in \{5, 6, 7, 8\}$, b) $n \in \{4, 5, 6\}$.

Wskazówka: a) Załóż, że $n \geq 5$.

Z warunków zadania $\frac{n!}{4!(n-4)!} > \frac{n!}{5!(n-5)!}$, gdzie $n \geq 5$, skąd $\frac{n!}{4!(n-5)!(n-4)} > \frac{n!}{4! \cdot 5(n-5)!}$,
czyli $\frac{1}{n-4} > \frac{1}{5}$, więc $n < 9$ i $n \geq 5$.

15.6. $n = 16$.

Wskazówka: Z warunków zadania: $\frac{\binom{n}{8}}{\binom{n}{7}} > 1$ i $\frac{\binom{n}{9}}{\binom{n}{n}} < 1$, czyli $\begin{cases} \frac{n-7}{8} > 1 \\ \frac{n-8}{9} < 1 \\ n \geq 9 \end{cases}$, skąd $\begin{cases} n > 15 \\ n < 17 \\ n \geq 9 \end{cases}$.

Kombinatoryka

15.7. Nie.

Wskazówka: Różnych ustawień pięciu słoni jest $5! = 120$ i $3 \cdot 120 < 365$.

15.8. 576.

Wskazówka: Istnieją $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby ustawienia początkowych czterech cyfr szyfru i tyle samo sposobów ustawienia czterech następnych cyfr, więc wszystkich możliwości sprawdzenia szyfru jest $4! \cdot 4!$, czyli $24 \cdot 24$.

15.9. a) $\frac{1}{35}$, b) $\frac{1}{35}$.

Wskazówka: $|\Omega| = 7!$, a) $|A| = 3! \cdot 4!$, więc $P(A) = \frac{3! \cdot 4!}{7!}$, b) $|B| = \frac{4! \cdot 3!}{7!}$,

gdzie $4!$ – liczba ustawień chłopców na miejscu pierwszym, trzecim, piątym i siódmym, $3!$ – liczba ustawień dziewcząt na miejscu drugim, czwartym i szóstym.

15.10. a) 48, b) 24, c) 192.

Wskazówka: a) $|A| = 2 \cdot 4!$, b) $|B| = 1 \cdot 4!$, c) $|C| = 4 \cdot 2 \cdot 4!$.

15.11. 42 wzory.

Wskazówka: $V_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!}$.

15.12. 336 rodzajów.

Wskazówka: $V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!}$.

15.13. 256 znaków.

Wskazówka: $\bar{V}_2^8 = 2^8$.

15.14. 9 000 100 abonentów.

Wskazówka: $9 \cdot \bar{V}_{10}^6 + 1 \cdot \bar{V}_{10}^2$.

15.15. 11 040 liczb.

Wskazówka: Zauważ, że liczba jest pięciocyfrowa. Jeśli:

- na pierwszym miejscu (od lewej) jest cyfra nieparzysta, to jest ich $5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ lub
- na pierwszym miejscu jest cyfra parzysta, to jest ich $4 \cdot \binom{4}{1} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.

Zatem wszystkich liczb jest: $7200 + 3840$.

15.16. a) 495, b) 396, c) 84.

Wskazówka:

a) $C_9^1 \cdot C_{11}^2$,

b) $C_9^2 \cdot C_{11}^1$,

c) $C_9^3 \cdot C_{11}^0$.

15.17. 135 sposobów.

Wskazówka: Można zarezerwować 3 pokoje dwuosobowe lub 2 pokoje trzyosobowe, czyli $C_{10}^3 + C_6^2$.

15.18. 10 545 możliwości.

Wskazówka: Odpowie co najmniej na 3 pytania, tzn. na trzy odpowie i na jedno nie odpowie lub na cztery odpowie, czyli $C_{20}^3 \cdot C_5^1 + C_{20}^4$.

15.19. 16 wielokątów.

Wskazówka: Narysowanymi wielokątami mogą być trójkąty, czworokąty, pięciokąty, więc jest ich $C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.

15.20. Dwunastu graczy.

Wskazówka: $C_n^2 = 66$, gdzie n oznacza liczbę graczy.

15.21. Piętnastu uczestników.

Wskazówka: Niech n oznacza liczbę wszystkich szachistów, gdzie $n \geq 4$. Liczba partii rozegranych przez

pozostałych (po wycofaniu się dwóch) szachistów jest równa $C_{n-2}^2 = \binom{n-2}{2}$.

Z warunków zadania $\binom{n-2}{2} + 2 \cdot 4 = 86$.

15.22. a) 12, b) 18, c) 91.

Wskazówka:

a) $\bar{V}_4^2 - V_4^1$,

b) $V_4^3 - V_3^2$,

c) zsumuj liczbę możliwości, gdy pierwszą cyfrą liczby dziesięciocyfrowej jest 3 lub 2 lub 1.

15.23. a) 96, b) 90.

Wskazówka:

a) $C_4^1 \cdot C_6^2 + C_4^2 \cdot C_6^1$,

b) $C_4^2 \cdot C_6^2$.

15.24. a) $29 \cdot 5^5 = 90\,625$,

b) $49 \cdot 5^9 = 95\,703\,125$,

c) $499 \cdot 5^{99}$.

Wskazówka:a) $\binom{6}{1}$ – liczba możliwości wyboru miejsca dla liczby parzystej ze zbioru $\{2, 4, 6, 8\}$ i $\binom{4}{1}$ – liczba możliwości wyboru jednej liczby parzystej, spośród czterech liczb,i 5^5 – liczba możliwości ustawienia na pozostałych pięciu miejscach liczby nieparzystej,czyli $\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1} \cdot 5^5 + \binom{5}{1} \cdot 5^5$, gdzie $\binom{5}{1}$ – liczba możliwości ustawień liczby 0 na pięciu miejscach (oprócz pierwszego od lewej),

b) $\binom{4}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot 5^9 + \binom{9}{1} \cdot 5^9$,

c) $\binom{4}{1} \cdot \binom{100}{1} \cdot 5^{99} + \binom{99}{1} \cdot 5^{99}$.

15.25. a) 1,

b) 100,

c) 5050,

d) 171 700.

Wskazówka: Wszystkie liczby stycyfrowe możemy podzielić na grupy w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu i jakie inne cyfry różne od zera stoją na pozostałych miejscach zapisu dziesiętnego tej liczby.

b)

Pierwsza cyfra	Możliwe następne cyfry różne od zera	Ilość liczb	Zastosowane wzory
2	–	1	–
1	1	99	$\binom{99}{1}$
Razem:		100	

c)

Pierwsza cyfra	Możliwe następne cyfry różne od zera	Ilość liczb	Zastosowane wzory
3	–	1	–
2	1	99	$\binom{99}{1}$
1	2	99	$\binom{99}{1}$
1	1 i 1	$\frac{99 \cdot 98}{2}$	$\binom{99}{2}$
Razem:		5050	

d)

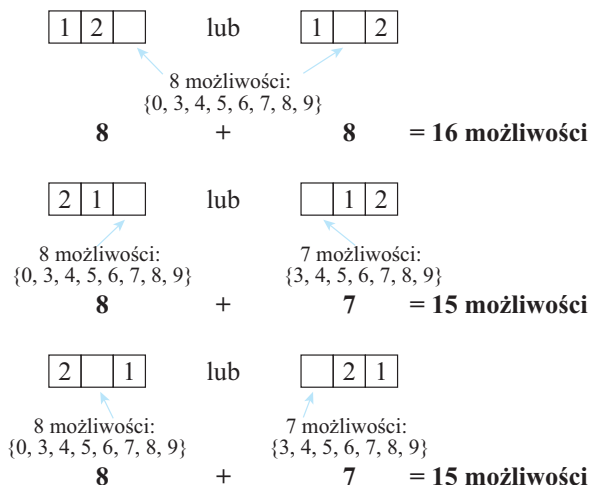
Pierwsza cyfra	Możliwe następne cyfry różne od zera	Ilość liczb	Zastosowane wzory
4	–	1	–
3	1	99	$\binom{99}{1}$
2	2	99	$\binom{99}{1}$
	1 i 1	$\frac{99 \cdot 98}{2}$	$\binom{99}{2}$
1	3	99	$\binom{99}{1}$
	1 i 2	$99 \cdot 98$	V_{99}^2 albo $\binom{99}{1} \cdot \binom{98}{1}$
	1, 1 i 1	$\frac{99 \cdot 98 \cdot 97}{6}$	$\binom{99}{3}$
Razem:		171 700	

15.26. 46 liczb.

Wskazówka: Na diagramie przedstawiono schemat liczby trzycyfrowej, w którym dla każdej pozycji w zapisie dziesiętnym

cyfra setek	cyfra dziesiątek	cyfra jednostki
-------------	------------------	-----------------

określono, ile jest możliwości jej uzupełnienia.



Takich liczb trzycyfrowych jest $16 + 15 + 15 = 46$.

15.27. **Wskazówka:** Wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych nieparzystych jest $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$.

Wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych nieparzystych w zapisie których nie występuje cyfra 7 jest $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2592$. Zatem wnioskujemy, że wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych nieparzystych w zapisie których występuje co najmniej jedna cyfra 7 jest $4500 - 2592$.

15.28. **Wskazówka:**

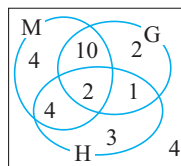
Zbiór:

M – uczniowie, którzy lubią matematykę,

G – uczniowie, którzy lubią geografę,

H – uczniowie, którzy lubią historię.

a) $10 + 4 + 2 + 1$.



15.29. **Wskazówka:** Partii rozegrano tyle, ile jest kombinacji $C_n^2 = \binom{n}{2}$. Oblicz n rozwiązując równanie

$$\frac{n(n-1)}{2} = 190, \text{ gdzie } n \text{ oznacza liczbę zawodników, czyli } n \in \mathbb{N}^+ \text{ i } n \geq 2.$$

15.30. **Wskazówka:** Płaszczyznę jednoznacznie wyznaczają trzy punkty niewspółliniowe, liczbę płaszczyzn oblicz

$$\text{z wzoru } C_7^3 = \binom{7}{3}.$$

Prawdopodobieństwo klasyczne i jego własności

$$15.31. \text{ a) } P(A) = \frac{4}{9}, \quad \text{ b) } P(B) = \frac{1}{9}.$$

Wskazówka: $|\Omega| = V_9^2 = 8 \cdot 9 = 72$.

a) Przypadków wylosowania za pierwszym razem liczby nieparzystej, a za drugim razem parzystej jest $V_5^2 = 5 \cdot 4$, a przypadków wylosowania za pierwszym razem liczby parzystej i za drugim razem liczby parzystej jest $V_4^2 = 4 \cdot 3$, więc $|A| = 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 32$ (z reguły dodawania),

b) cyfra jedności to 5, a cyfra dziesiątek jest liczbą różną od 5, czyli pary: $(1, 5)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$, $(6, 5)$, $(7, 5)$, $(8, 5)$, $(9, 5)$, czyli $P(B) = \frac{8}{9 \cdot 8} = \frac{1}{9}$.

$$15.32. \text{ a) } P(A) = \frac{5}{18}, \quad \text{ b) } P(B) = \frac{2}{27}, \quad \text{ c) } P(C) = \frac{1}{3}.$$

Wskazówka: $|\Omega| = \bar{V}_6^3 = 216$. a) W pierwszym rzucie może выпаść liczba oczek: 2, 3, ..., 6, w drugim rzucie: 3, 4, 5, 6, a w trzecim rzucie: 4, 5 i 6. Zatem $|A| = 5 \cdot 4 \cdot 3$.

$$\text{b) } |B| = C_3^2 \cdot 5 + 1.$$

c) $|C| = \bar{V}_4^3 + \bar{V}_2^3 = 72$, gdzie $\bar{V}_4^3$ oznacza liczbę możliwych wyborów trójki liczb ze zbioru $\{1, 4, 16, 25\}$, a $\bar{V}_2^3$ oznacza liczbę możliwych wyborów trójki liczb ze zbioru $\{9, 36\}$.

$$15.33. P(A) = \frac{5}{72}.$$

Wskazówka: $|\Omega| = 6^4$. Ciągów geometrycznych, których wyrazami są liczby oczek wyrzuconych kolejno na kostkach jest 8. Są to: $(1, 2, 4)$; $(4, 2, 1)$; $(1, 1, 1)$; $(2, 2, 2)$; $(3, 3, 3)$; $(4, 4, 4)$; $(5, 5, 5)$; $(6, 6, 6)$.

Np. 1° Jeśli w trzech rzutach otrzymamy ciąg $(1, 2, 4)$, to takich zdarzeń jest 12. Są to:

$(1, 2, 4, 1)$; $(1, 2, 4, 2)$; $(1, 2, 4, 3)$; $(1, 2, 4, 4)$; $(1, 2, 4, 5)$; $(1, 2, 4, 6)$;

$(1, 1, 2, 4)$; $(2, 1, 2, 4)$; $(3, 1, 2, 4)$; $(4, 1, 2, 4)$; $(5, 1, 2, 4)$; $(6, 1, 2, 4)$.

2° Jeśli w trzech rzutach otrzymamy ciąg stały, np. $(1, 1, 1)$, to takich zdarzeń jest 11. Są to:

$(1, 1, 1, 1)$; $(1, 1, 1, 2)$; $(1, 1, 1, 3)$; $(1, 1, 1, 4)$; $(1, 1, 1, 5)$; $(1, 1, 1, 6)$;

$(2, 1, 1, 1)$; $(3, 1, 1, 1)$; $(4, 1, 1, 1)$; $(5, 1, 1, 1)$; $(6, 1, 1, 1)$. Zatem $|A| = 2 \cdot 12 + 6 \cdot 11 = 90$.

$$15.34. \frac{52}{57}.$$

$$15.35. \text{ a) } P(A) = \frac{1128}{5525}, \quad \text{ b) } P(B) = \frac{73}{5525}, \quad \text{ c) } P(C) = \frac{176}{5525}, \quad \text{ d) } P(D) = \frac{22}{425}.$$

Wskazówka: a) $|\Omega| = C_{52}^3$, $|A| = C_4^1 \cdot C_{48}^2$,

b) $|B| = C_4^2 \cdot C_{48}^1 + C_4^3$,

c) $|C| = C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{44}^1$,

d) $|D| = C_4^1 \cdot C_{13}^3$.

15.36. $P(A) \approx 0,0002$.

Wskazówka: $|\Omega| = C_{42}^5$, czyli $|\Omega| = 850\,668$. $|A| = C_5^4 \cdot C_{37}^1 + C_5^5$, czyli $|A| = 186$. Zatem $P(A) = \frac{186}{850\,668}$.

15.37. $\frac{5}{36}$.

Wskazówka: Gdy na przykład wartość bezwzględna różnicy liczby oczek w pierwszym i w drugim rzucie jest równa 2, to zdarzeń sprzyjających jest 8. Są to:

$$\{(1, 3, 2), (2, 4, 2), (3, 5, 2), (4, 6, 2), (3, 1, 2), (4, 2, 2), (5, 3, 2), (6, 4, 2)\}.$$

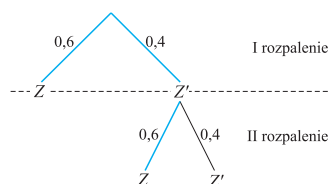
Rozpatrz pozostałe możliwości.

15.38. Zdarzenia A i B nie spełniają warunku.

Wskazówka: $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$, $P(A \cap B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, więc $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

15.39. Turysta ma większe szanse rozpalenia ogniska używając do tego celu dwie złączone zapalki.

Wskazówka: Oznacz: Z – turysta rozпали ognisko jedną zapalką,



$$P(A) = 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,84.$$

15.40. a) $P(A) = 0,625$,

b) $P(B) = \frac{4}{9}$,

c) $P(C) = \frac{1}{9}$.

Wskazówka:

a) Każda liczba trzycyfrowa, w której pierwszą cyfrą jest 1, 2, 3, 4 lub 5 jest mniejsza od 600, czyli takich

liczb jest $5 \cdot V_8^2$. Jeżeli cyfrą setek jest 6, to cyfrą dziesiątek może być 1, 2, 3, 4 lub 5, a cyfrą jedności

dowolna cyfra z pozostałych siedmiu cyfr, czyli liczb jest $1 \cdot 5 \cdot 7$. Zatem $|A| = 5 \cdot V_8^2 + 1 \cdot 5 \cdot 7$.

b) Otrzymana liczba jest parzysta, gdy jej ostatnią cyfrą jest 2 lub 4 lub 6 lub 8. Zatem $|B| = 4 \cdot V_8^2$.

15.41. **Wskazówka:** $\frac{\binom{6}{2}}{\binom{n}{2}} > \frac{1}{3}$, gdy $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 6$, skąd $n^2 - n - 90 < 0$, czyli $(n-10)(n+9) < 0$.

15.42. **Wskazówka:** $P(A \cup B) = P(A) + [1 - P(B')] - P(A \cap B)$.

15.43. a) $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$,

b) $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$.

Wskazówka: a) $|\Omega| = V_5^2$. Iloczyn dwóch liczb jest ujemny, gdy liczby są przeciwnych znaków.

15.44. a) $\frac{35}{102}$, b) $\frac{7}{17}$, c) $\frac{29}{34}$.

Wskazówka:

I sposób: $|\Omega| = C_{18}^3$, czyli $|\Omega| = 816$.

a) Wylosowano dwie czarne kule i jedną białą, zatem $P(A) = \frac{C_8^2 \cdot C_{10}^1}{C_{18}^3}$.

b) Wylosowano dwie czarne kule i jedną białą lub trzy czarne.

Zatem $P(B) = \frac{C_8^2 \cdot C_{10}^1 + C_8^3}{C_{18}^3}$.

c) Jeśli zdarzenie C polega na wylosowaniu co najmniej jednej kuli czarnej, to zdarzenie C' polega na wylosowaniu trzech kul białych.

Zatem $P(C') = \frac{C_{10}^3}{C_{18}^3}$, czyli $P(C') = \frac{5}{34}$, więc $P(C) = 1 - P(C')$.

15.45. a) $\frac{2}{33}$, b) $\frac{13}{66}$.

Wskazówka: $|\Omega| = C_{11}^4$.

a) $|A| = C_5^4 + C_6^4$,

b) $|B| = C_5^4 + C_5^3 \cdot C_6^1$.

15.46. $P(A) = \frac{56}{99}$.

Wskazówka: $|\Omega| = C_{12}^5$. Przed losowaniem stosunek liczby kul białych do czarnych był równy $k_1 = \frac{8}{4} = 2$.

Po losowaniu w urnie pozostało 7 kul, więc możliwe są dwa przypadki:

1° pięć białych i dwie czarne, wtedy $k_2 = \frac{5}{2}$, więc $k_2 > 2$.

2° sześć białych i jedna czarna, wtedy $k_3 = \frac{6}{1}$, więc $k_3 > 2$. Zatem $|A| = C_8^3 \cdot C_4^2 + C_8^2 \cdot C_4^3$.

15.47. $n = 15$.

Wskazówka:

$|\Omega| = C_{n+6}^2$, gdzie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, czyli $|\Omega| = \frac{1}{2}(n+5)(n+6)$. $|A| = C_n^2$, czyli $|A| = \frac{1}{2}(n-1)n$.

Ponieważ $P(A) = \frac{1}{2}$, więc $\frac{\frac{1}{2}(n-1)n}{\frac{1}{2}(n+5)(n+6)} = \frac{1}{2}$, stąd $n_1 = -2$, $n_2 = 15$.

II sposób:

a)

$$P(A) = \frac{10}{18} \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{7}{16} + \frac{8}{18} \cdot \frac{10}{17} \cdot \frac{7}{16} + \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} \cdot \frac{10}{16}$$

15.48. $n = 3$.

Wskazówka: $|\Omega| = C_{10}^n = \frac{10!}{n!(10-n)!}$, $|A'| = C_8^n = \frac{8!}{n!(8-n)!}$, gdzie $n \in N$ i $n \in \langle 1; 8 \rangle$. $P(A) = 1 - P(A')$,

czyli $P(A) = 1 - \frac{|A'|}{|\Omega|}$. Z warunku zadania $P(A) > \frac{1}{2}$, czyli $1 - \frac{8!}{n!(8-n)!} \cdot \frac{n!(10-n)!}{10!} > \frac{1}{2}$, więc

$$\frac{(10-n)!}{(8-n)! \cdot 9 \cdot 10} < \frac{1}{2}, \text{ stąd } \frac{(8-n)!(9-n)(10-n)}{(8-n)! \cdot 90} < \frac{1}{2}.$$

15.49. $n \in \{4, 5, 6\}$.

Wskazówka: $|\Omega| = C_n^2$, czyli $|\Omega| = \frac{(n-1)n}{2}$, gdzie $n \geq 4$ oraz $|A| = C_4^2$, czyli $|A| = 6$.

Zatem $P(A) = \frac{12}{n^2 - n}$, a z warunku zadania $P(A) > \frac{1}{3}$.

15.50. $P(A) = \frac{1}{1120}$.

Wskazówka: $|\Omega| = 8!$. Wśród ośmiu osób małżonkowie idą na czwartym i piątym miejscu.

Pozostałe trzy kobiety idą w dowolnym ustawieniu na trzech pierwszych miejscach, a pozostali trzej mężczyźni na trzech końcowych miejscach, też w dowolnym ustawieniu. $|A| = 3! \cdot 3!$.

15.51. Par butów może być co najwyżej 10.

Wskazówka: $|\Omega| = C_{2n}^2$, czyli $|\Omega| = n(2n-1)$, a $|A| = C_n^1$,

$|A| = n$. Z warunków zadania $P(A) > \frac{1}{21}$, czyli $\frac{n}{n(2n-1)} > \frac{1}{21}$.

15.52. a) $P(A) = \frac{5}{6}$,

b) $P(A) = \frac{1}{3}$,

c) $P(A) = \frac{1}{4}$ lub $P(A) = \frac{3}{4}$.

Wskazówka: b) $3P(A') \cdot [P(A) - 2] = 3[1 - P(A)][P(A) - 2]$. Niech $P(A) = t$ i $t \in \langle 0; 1 \rangle$, wtedy

otrzymujemy równanie równoważne $3(1-t)(t-2) + 3\frac{1}{3} = 0$, stąd $-3t^2 + 9t - 2\frac{2}{3} = 0$, więc $t_1 = \frac{8}{3}$, $t_2 = \frac{1}{3}$.

Prawdopodobieństwo warunkowe

15.53. **Wskazówka:** $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ oraz $P(A|B) = \frac{1}{5}$.

15.54. $\frac{10}{19}$.

Wskazówka: $|\Omega| = V_{20}^2 = 380$. Przyjmij: A – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej za drugim razem, B – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli czarnej za pierwszym razem,

$A \cap B$ – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli czarnej za pierwszym razem i białej za drugim razem.

$$|A \cap B| = 10 \cdot 10 = 100, \quad |B| = 10 \cdot 19 = 190 \quad \text{i} \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

15.55. $\frac{4}{51}$.

Wskazówka: $|\Omega| = V_{52}^2 = 51 \cdot 52$. Przyjmij: A – zdarzenie polegające na wylosowaniu asa za drugim razem, B – zdarzenie polegające na wylosowaniu za pierwszym razem karty innej niż as. $|A \cap B| = 48 \cdot 4$, $|B| = 48 \cdot 51$ i $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

15.56. $\frac{4}{5}$.

Wskazówka: Przyjmij: A – zdarzenie polegające na tym, że wybrany detal będzie poddany dalszej obróbce, B – zdarzenie polegające na tym, że wybrany detal jest I gatunku. $|\Omega| = 1000$, $|A| = 950$, $|B| = 760$, $|B \cap A| = 760$ i $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

15.57. **Wskazówka:** Założenie: $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$. Teza: $P(A|B) \geq 0,5$.

Dowód: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ i $P(A \cup B) \leq 1$, czyli $0,6 + 0,8 - P(A \cap B) \leq 1$, skąd

$P(A \cap B) \geq 0,4$ i $P(B)$. Zatem $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq \frac{0,4}{0,8}$, czyli $P(A|B) \geq 0,5$. **cnw.**

15.58. $\frac{26}{57}$.

Wskazówka: $P(A|B) = \frac{p_3 + p_5}{p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6}$.

15.59. $\frac{5}{11}$.

Wskazówka: Przyjmij zdarzenia:

A – suma oczek jest większa od 8, B – co najmniej na jednej kostce wypadło 5 oczek,

$(A \cap B)$ – suma oczek jest większa od 8 i co najmniej na jednej kostce wypadło 5 oczek.

$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$, gdzie $|B| = 11$ i $|A \cap B| = 5$, bo $B = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5)\}$, $A \cap B = \{(5, 4), (5, 5), (5, 6), (4, 5), (6, 5)\}$.

15.60. a) $\frac{11}{32}$, b) $\frac{1}{4}$.

Wskazówka: Przyjmij zdarzenia:

a) A – suma jest podzielna przez 3, B – pierwsza liczba jest liczbą pierwszą,

$(A \cap B)$ – suma jest podzielna przez 3 i pierwsza liczba jest liczbą pierwszą,

$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$, gdzie $|B| = 32$, bo na pierwszym miejscu jest jedna z liczb 2, 3, 5, 7, a na drugim miejscu dowolna liczba oraz $A \cap B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 7), (3, 6), (3, 9), (5, 1), (5, 4), (5, 7), (7, 2), (7, 5), (7, 8)\}$.

15.61. $\frac{4}{17}$.

Wskazówka: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, gdzie $A \cap B$ oznacza zakup niemieckich krakersów,

B – oznacza zakup niemieckich herbatników

15.62. a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{16}{81}$.

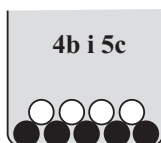
Wskazówka: Przyjmij zdarzenia:

A – pierwsza wylosowana kula jest biała, B – druga wylosowana kula jest biała.

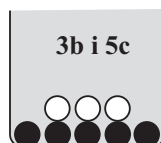
Oblicz $P(A \cap B)$, gdzie $(A \cap B)$ – zdarzenie polegające na wyborze za pierwszym razem kuli białej i za drugim razem kuli białej.

a) Losowanie bez zwracania

Z treści zadania wynika, że $P(A) = \frac{4}{9}$ oraz $P(A|B) = \frac{3}{8}$.



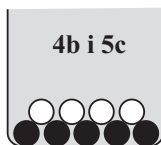
Sytuacja przed losowaniem pierwszej kuli



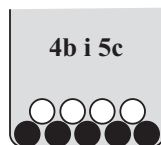
Sytuacja po pierwszym losowaniu

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}.$$

b) Losowanie ze zwracaniem



Sytuacja przed losowaniem pierwszej kuli



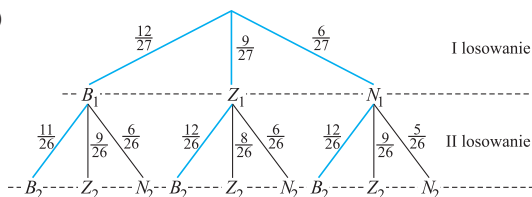
Sytuacja przed losowaniem drugiej kuli

$P(A) = \frac{4}{9}$ oraz $P(A|B) = \frac{4}{9}$ (wylosowana kula biała po pierwszym losowaniu ponownie wróciła do urny).

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}.$$

Prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa

15.63. a)



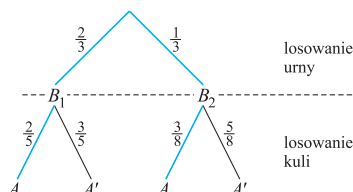
b) $\frac{4}{9}$.

c) $\frac{1}{3}$.

Wskazówka: a) Oznacz zdarzenia: B_i – kula biała w i -tym losowaniu, gdy $i \in \{1, 2\}$, Z_i – kula zielona w i -tym losowaniu, gdy $i \in \{1, 2\}$, N_i – kula niebieska w i -tym losowaniu, gdy $i \in \{1, 2\}$.

b) A oznacza zdarzenie, że obie kule są tego samego koloru $P(A) = \frac{12}{27} \cdot \frac{11}{26} + \frac{9}{27} \cdot \frac{8}{26} + \frac{6}{27} \cdot \frac{5}{26}$.

15.64. a)



b) $P(A) = \frac{47}{120}$.

Wskazówka: a) Oznacz zdarzenia: B_1 – losowanie kuli z pierwszej urny, B_2 – losowanie kuli z drugiej urny, A – wylosowanie kuli białej. b) $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}$.

15.65. Basia powinna wybrać I sposób losowania.

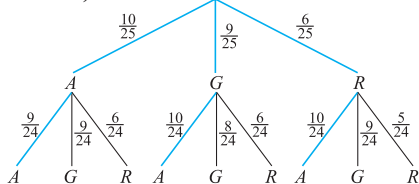
Wskazówka: Oznacz zdarzenia:

A_I – wyciągnięcie co najmniej jednego losu wygrywającego w losowaniu I sposobem;

A_{II} – wyciągnięcie co najmniej jednego losu wygrywającego w losowaniu II sposobem.

Zatem $P(A_I) = \frac{\binom{2}{1} \binom{198}{1} + \binom{2}{2}}{\binom{200}{2}}$, $P(A_{II}) = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100} + \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{100}$.

15.66. a)



Wskazówka: a) Oznacz zdarzenia: A – wylosowanie

tematu algebry, G – wylosowanie tematu z geometrii,

R – wylosowanie tematu z rachunku prawdopodobieństwa.

b) B – oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu tematu z algebry za drugim razem,

$$P(B) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} + \frac{9}{25} \cdot \frac{10}{24} + \frac{6}{25} \cdot \frac{10}{24} = \frac{10}{25}.$$

b) 0,4.

15.67. a) $P(A) = \frac{5}{18}$, b) $P(B) = \frac{5}{9}$.

Wskazówka:

a) Oznacz zdarzenia: C_1 – odłożenie po pierwszym losowaniu kuli białej, C_2 – odłożenie po pierwszym losowaniu kuli czarnej.

Zatem $P(C_1) = \frac{5}{9}$, $P(C_2) = \frac{4}{9}$, $P(A|C_1) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{14}$, $P(A|C_2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{5}{14}$.

$P(A) = P(A|C_1) \cdot P(C_1) + P(A|C_2) \cdot P(C_2)$.

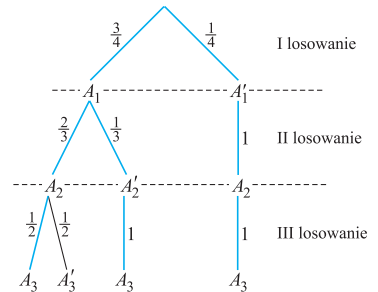
b) $P(B|C_1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{16}{28}$, $P(B|C_2) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$.

15.68. Oba zdarzenia są jednakowo prawdopodobne.

Wskazówka: A_i – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej

w i -tym losowaniu, gdy $i \in \{1, 2, 3\}$.

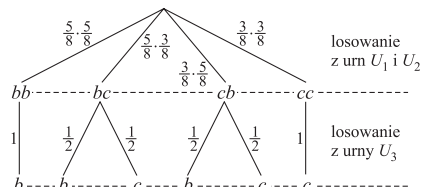
$P(A_1) = \frac{3}{4}$, $P(A_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1$, czyli $P(A_3) = \frac{3}{4}$.



15.69. $P(A) = \frac{5}{8}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia:

b – biała kula, c – czarna kula. $P(A) = \frac{25}{64} \cdot 1 + \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{2} + \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{2}$.



15.70. $P(A) = \frac{3}{5}$.

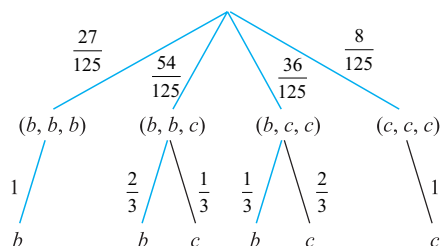
Wskazówka: W czwartej urnie mogą być:

trzy kule białe (b, b, b) lub

dwie kule białe i jedna czarna (b, b, c) lub

jedna kula biała i dwie czarne (b, c, c) lub

trzy kule czarne (c, c, c).



Zatem $P(b, b, b) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$, czyli $P(b, b, b) = \frac{27}{125}$.

$P(b, b, c) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$, czyli $P(b, b, c) = \frac{54}{125}$.

$P(b, c, c) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$, czyli $P(b, c, c) = \frac{36}{125}$.

$P(c, c, c) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$, czyli $P(c, c, c) = \frac{8}{125}$.

Stosując regułę iloczynów i regułę sum otrzymasz: $P(A) = \frac{27}{125} \cdot 1 + \frac{54}{125} \cdot \frac{2}{3} + \frac{36}{125} \cdot \frac{1}{3}$.

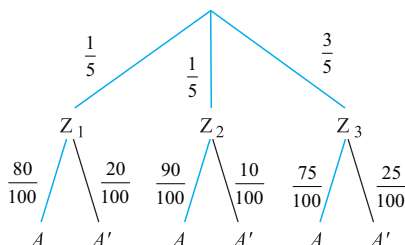
15.71. $P(A) = 0,79$.

Wskazówka: Z warunków zadania zdarzenie A

to wybór soku pierwszego gatunku, więc zdarzenie A'

to wybór soku w gatunku innym niż pierwszy.

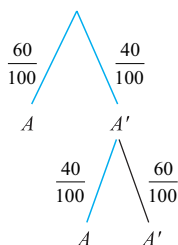
$P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{80}{100} + \frac{1}{5} \cdot \frac{90}{100} + \frac{3}{5} \cdot \frac{75}{100}$.



15.72. $P(A) = 0,76$.

Wskazówka: Zdarzenie A' oznacza zdarzenie, że komar przeżyje dwukrotne opylanie.

$P(A) = \frac{60}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100}$.



15.73. a) $P(A) = \frac{1}{28}$,

b) $P(B) = \frac{3}{14}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia losów: g – główna wygrana,

p – nagroda pocieszenia, d – dalsze losowanie, s – pusty los.

$$P(A) = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29} + \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29} \cdot \frac{1}{28},$$

$$P(B) = P(A) + \frac{5}{30} + \frac{2}{30} \cdot \frac{5}{29} + \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29} \cdot \frac{5}{28}.$$

15.74. $k = 10$ lub $k = 11$.

Wskazówka: Prawdopodobieństwo wyciągnięcia losowo kuli białej (b)

z każdej z urn jest równe $\frac{k}{21}$, a zielonej (z) jest równe $\frac{21-k}{21}$.

$$P(A) = \frac{k}{21} \cdot \frac{21-k}{21} + \frac{21-k}{21} \cdot \frac{k}{21} = \frac{21k-k^2}{441} + \frac{21k-k^2}{441} = -\frac{2}{441}k^2 + \frac{2}{21}k, \text{ gdy } k \in \mathbb{N}^+.$$

Wartość $P(A)$ jest największa, gdy k jest liczbą rzeczywistą i jest pierwszą współrzędną wierzchołka W paraboli, będącej

wykresem funkcji $f(k) = -\frac{2}{441}k^2 + \frac{2}{21}k$, czyli $k_W = \frac{-\frac{2}{21}}{-2 \cdot \frac{2}{441}} = 10,5$.

Ponieważ $k \in \mathbb{N}^+$, więc $k_1 = 10$ lub $k_2 = 11$, bo $f(10) = f(11)$

i liczby 10 i 11 są najbliższymi liczbami naturalnymi

w stosunku do liczby 10,5, a wykres funkcji f

jest symetryczny względem prostej $k = 10,5$.

15.75. $\frac{2}{15}$

Wskazówka: W wyniku losowania trzech kul z pierwszej urny możliwe są trzy zdarzenia:

B_1 – wylosowano dwie kule białe,

B_2 – wylosowano kulę białą i kulę czarną.

B_3 – wylosowano dwie kule czarne.

Zdarzeniem elementarnym jest kombinacja dwóch kul ze zbioru 10 kul, więc

$$|\Omega| = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45, \quad |B_1| = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6, \quad |B_2| = 6 \cdot 4 = 24, \quad |B_3| = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15, \text{ więc}$$

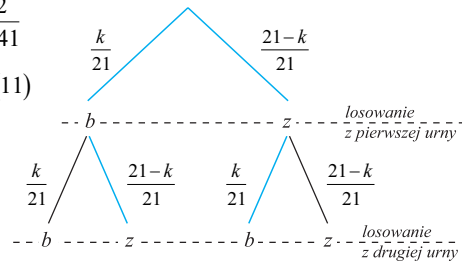
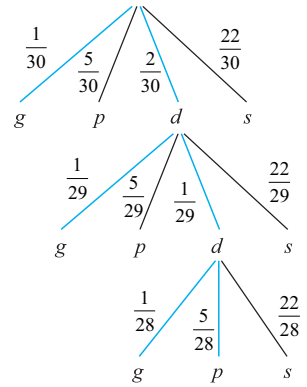
$$P(B_1) = \frac{|B_1|}{|\Omega|} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}, \quad P(B_2) = \frac{|B_2|}{|\Omega|} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}, \quad P(B_3) = \frac{|B_3|}{|\Omega|} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

Oznacz przez A zdarzenie, że w drugim losowaniu wylosujemy dwie kule białe.

$$P(A|B_1) = \frac{2 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{1}{4}, \quad P(A|B_2) = \frac{3 \cdot 1}{8 \cdot 2} = \frac{3}{16}, \quad P(A|B_3) = 0.$$

Z wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{15} + \frac{3}{16} \cdot \frac{8}{15} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{1}{30} + \frac{3}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$



15.76. $\frac{5}{12}$.

Wskazówka: Przyjmij zdarzenia: C – na wycieczkę pojedzie chłopiec;

R – przy rzucie monetą wypadła reszka, więc $P(R) = \frac{1}{2}$,

O – przy rzucie monetą wypadł orzeł, więc $P(O) = \frac{1}{2}$,

$C|O$ – na wycieczkę pojedzie chłopiec pod warunkiem, że przy rzucie monetą wypadł orzeł (pojedzie

chłopiec z klasy pierwszej), więc $P(C|O) = \frac{10}{30}$,

$C|R$ – na wycieczkę pojedzie chłopiec pod warunkiem, że przy rzucie monetą wypadła reszka (pojedzie

chłopiec z klasy drugiej), więc $P(C|R) = \frac{15}{30}$. $P(C) = P(O) \cdot P(C|O) + P(R) \cdot P(C|R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{30}$.

15.77. 0,4.

Wskazówka: Przyjmij zdarzenia:

A – za drugim razem wylosowano temat z epoki romantyzmu,

B_1 – za pierwszym razem wylosowano temat z epoki romantyzmu,

B_2 – za pierwszym razem wylosowano temat z epoki pozytywizmu,

B_3 – za pierwszym razem wylosowano temat z epoki średniowiecza.

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} + \frac{9}{25} \cdot \frac{10}{24} + \frac{6}{25} \cdot \frac{10}{24} = 0,4.$$

Jeśli z treści zadania wnioskujesz, że pierwsze losowanie nie ma żadnego wpływu na wynik, zadanie możesz

rozwiązać wykorzystując definicję prawdopodobieństwa klasycznego: $P(A) = \frac{C_{10}^1}{C_{25}^1}$.

15.78. $\frac{287}{300}$.

Wskazówka: Przyjmij zdarzenia:

A – kupiona lampa jest dobra,

Z_1 – kupiona lampa została wyprodukowana przez pierwszą zmianę, więc $P(Z_1) = \frac{2}{3}$,

Z_2 – kupiona lampa została wyprodukowana przez drugą zmianę, więc $P(Z_2) = \frac{1}{3}$,

$A|Z_1$ – kupiona lampa jest dobra pod warunkiem, że wyprodukowała ją pierwsza zmiana,

$$\text{więc } P(A|Z_1) = 1 - \frac{5}{100} = \frac{95}{100},$$

$A|Z_2$ – kupiona lampa jest dobra pod warunkiem, że wyprodukowała ją druga zmiana,

$$\text{więc } P(A|Z_2) = 1 - \frac{3}{100} = \frac{97}{100}, \quad P(A) = P(Z_1) \cdot P(A|Z_1) + P(Z_2) \cdot P(A|Z_2) = \frac{287}{300}.$$

15.79. 0,049.

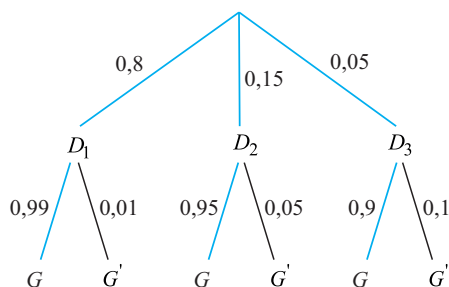
Wskazówka: Przyjmij zdarzenia: A_1 – zdarzenie polegające na wylosowaniu towaru pochodzącego z I fabryki, A_2 – zdarzenie polegające na wylosowaniu towaru pochodzącego z II fabryki, A_3 – zdarzenie polegające na wylosowaniu towaru pochodzącego z importu, B – zdarzenie polegające na wylosowaniu braku.

$$P(A_1) = 0,5, \quad P(A_2) = 0,3, \quad P(A_3) = 0,2, \quad P(B|A_1) = 0,05, \quad P(B|A_2) = 0,04, \quad P(B|A_3) = 0,06,$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) = 0,5 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,06 = 0,049.$$

15.80. a) 0,0205, b) $\frac{16}{41}$.**Wskazówka:** Przyjmij zdarzenia: G' – wylosowanie gruszki zepsutej, D_1 – wylosowanie gruszki od pierwszego dostawcy, D_2 – wylosowanie gruszki od drugiego dostawcy, D_3 – wylosowanie gruszki od trzeciego dostawcy.

a)



$$P(G') = P(G'|D_1) \cdot P(D_1) + P(G'|D_2) \cdot P(D_2) + P(G'|D_3) \cdot P(D_3) = .$$

$$= 0,01 \cdot 0,8 + 0,05 \cdot 0,15 + 0,05 \cdot 0,1 = 0,0205.$$

$$\text{b) } P(D_1|G') = \frac{P(D_1) \cdot P(G'|D_1)}{P(G')} = \frac{0,8 \cdot 0,01}{0,0205} = \frac{16}{41}.$$

15.81. a) 0,972, b) $\frac{4}{7}$.

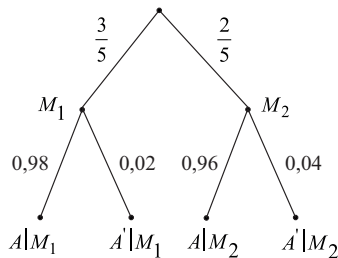
Wskazówka: Przyjmij zdarzenia:

A – wylosowana nakrętka jest dobra,

A' – wylosowana nakrętka jest wadliwa,

M_1 – wylosowaną nakrętkę wytworzyła pierwsza maszyna,

M_2 – wylosowaną nakrętkę wytworzyła druga maszyna.



$$\text{a) } P(A) = P(A|M_1) \cdot P(M_1) + P(A|M_2) \cdot P(M_2) = \frac{98}{100} \cdot \frac{3}{5} + \frac{96}{100} \cdot \frac{2}{5} = 0,972,$$

$$\text{b) } P(M_2|A') = \frac{P(M_2 \cap A')}{P(A')} = \frac{P(A'|M_2) \cdot P(M_2)}{P(A')} = \frac{0,04 \cdot \frac{2}{5}}{1 - 0,972} = \frac{0,016}{0,028} = \frac{4}{7}.$$

15.82. $\frac{380}{961}$.

Wskazówka: Przyjmij zdarzenia:

D – wylosowana żarówka jest dobra,

Z_1 – żarówkę wyprodukował zakład pierwszy,

Z_2 – żarówkę wyprodukował zakład drugi,

Z_3 – żarówkę wyprodukował zakład trzeci,

$Z_3 | D$ – wylosowana żarówka pochodzi z zakładu trzeciego pod warunkiem, że jest dobra.

$$P(D) = P(D|Z_1) \cdot P(Z_1) + P(D|Z_2) \cdot P(Z_2) + P(D|Z_3) \cdot P(Z_3) = \frac{98}{100} \cdot \frac{25}{100} + \frac{96}{100} \cdot \frac{35}{100} + \frac{95}{100} \cdot \frac{40}{100}$$

wyznacz z wzoru: $P(Z_3|D) = \frac{P(Z_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|Z_3) \cdot P(Z_3)}{P(D)}.$

15.83. $\frac{96}{103}$.

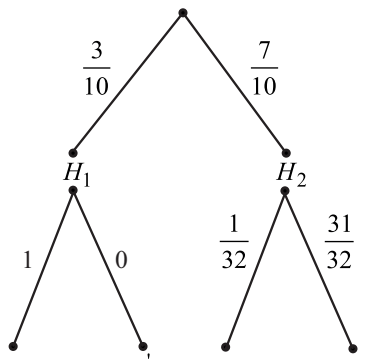
Wskazówka: Przyjmij zdarzenia:

H_1 – wybór monety z orłami po obu stronach,

H_2 – wybór monety prawidłowej,

A – otrzymanie pięć razy orła.

$$P(H_1|A) = \frac{1 \cdot \frac{3}{10}}{1 \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{32} \cdot \frac{7}{10}} = \frac{96}{103}.$$



Schemat Bernoulliego

$$15.84. \text{ a) } P(A) = \frac{80}{243}, \quad \text{ b) } P(B) = \frac{13}{16}.$$

Wskazówka: Zauważ, że można zastosować schemat Bernoulliego, gdzie pojedynczą próbą jest rzut symetryczną kostką do gry, a prób tych jest $n = 5$.

$$\text{a) } p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad q = 1 - p = \frac{2}{3}, \quad k = 2, \text{ więc } P(A) = P_5(k=2) = \binom{5}{2} \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{80}{243}.$$

$$\text{b) } p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad q = 1 - p = \frac{1}{2}; \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

$$P_5(k \leq 3) = 1 - P_5(k > 3) = 1 - [P_5(k=4) + P_5(k=5)] = 1 - \left[\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot q + \binom{5}{5} \cdot p^5 \cdot q^0 \right] = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}.$$

15.85. Łatwiej jest otrzymać sumę oczek równą 17 w trzech rzutach kostką, niż co najmniej 9 orłów w dziesięciu rzutach monetą.

Wskazówka:

A – zdarzenie otrzymania co najmniej dziewięciu orłów w dziesięciu rzutach monetą. Aby wyznaczyć $P(A)$ skorzystaj ze schematu Bernoulliego, w którym $n = 10$; $k \geq 9$, czyli $k = 9$ lub $k = 10$, $p = q = \frac{1}{2}$.

$$P(A) = P_{10}(k \geq 9) = P_{10}(k=9) + P_{10}(k=10) = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{11}{1024} = \frac{11}{2^{10}}.$$

B – zdarzenie polegające na otrzymaniu w sumie 17 oczek w trzech rzutach kostką do gry.

$$B = \{(6, 6, 5), (6, 5, 6), (5, 6, 6)\}, \text{ czyli } |B| = 3 \text{ i } |\Omega| = \bar{V}_6^3 = 6^3 = 216, \text{ więc } P(B) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}.$$

$$P(A) = \frac{11}{2^{10}} = \frac{11 \cdot 3^2}{2^{10} \cdot 3^2} = \frac{99}{2^{10} \cdot 3^2}, \quad P(B) = \frac{1}{72} = \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{1 \cdot 2^7}{2^{10} \cdot 3^2} = \frac{128}{2^{10} \cdot 3^2}, \text{ więc } P(A) < P(B).$$

$$15.86. 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8, \quad k_0 = 1.$$

Wskazówka: $P_8(1 \leq k \leq 8) = 1 - P_8(k=0)$, gdzie $n = 8$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

$$[(n+1)p] = \left[(8+1) \cdot \frac{1}{6}\right] = \left[\frac{3}{2}\right], \text{ więc } k_0 = 1. \quad \left(\left[\frac{3}{2}\right] = 1, \text{ bo } 1 \text{ jest częścią całkowitą liczby } 1,5.\right)$$

$$15.87. \text{ Wskazówka: } n_1 = 4 \text{ i } k_1 = 3 \text{ oraz } n_2 = 8 \text{ i } k_2 = 5, \quad p = q = \frac{1}{2}, \text{ więc } P_4(k=3) = \frac{1}{4}, \text{ i } P_8(k=5) = \frac{7}{32}.$$

$$15.88. \text{ a) } P_{10}(k=8) \approx 0,3, \quad \text{ b) } P_{10}(k \geq 1) \approx 0,99.$$

Wskazówka: $p = 0,8$, $q = 0,2$, $n = 10$,

$$\text{b) } P_{10}(k \geq 1) = 1 - P_{10}(k=0).$$

$$15.89. 10 \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^2.$$

Wskazówka: $n=5$, $p = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{15}$, $q = \frac{7}{15}$.

$$15.90. 1 - \left(\frac{4}{13}\right)^8.$$

Wskazówka: $n=8$, $p = \frac{4}{13}$, $q = \frac{9}{13}$, $P_8(0 \leq k \leq 7) = 1 - P_8(k=8)$.

15.91. Co najmniej 13 razy.

Wskazówka: $p = \frac{1}{8}$, $q = \frac{7}{8}$,

$$P_n(1 \leq k \leq n) = 1 - P_n(k=0) = 1 - \binom{n}{0} \left(\frac{1}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n \text{ oraz } 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n > 0,8, \text{ czyli } \left(\frac{7}{8}\right)^n < 0,2,$$

skąd $n > 12$.

$$15.92. \frac{5}{729}.$$

Wskazówka: $n=7$, $k=6$ lub $k=7$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$. $P_7(6 \leq k \leq 7) = P_7(k=6) + P_7(k=7)$.

$$15.93. p = \frac{2 - \sqrt[4]{11}}{2}.$$

Wskazówka: $P_4(k \geq 1) = \frac{5}{16}$, więc $P_4(k=0) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$.

Ponieważ $P_4(k=0) = \binom{4}{0} p^0 (1-p)^4$, więc $\binom{4}{0} p^0 (1-p)^4 = \frac{11}{16}$.