

13. Planimetria – odpowiedzi i wskazówki

Twierdzenie Talesa i podobieństwo

13.1. a) $x = 4$, b) $x = 21$, c) $x = 200$,

13.2. a) $|OB| = 8$, b) $|OB| = 4,5$.

13.3. $x = 24$.

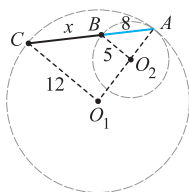
13.4. a) $x = 1\frac{4}{5}$, b) $y = 3\frac{1}{3}$.

13.5. a) Tak, b) nie, c) tak.

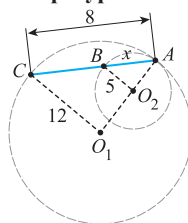
13.6. 24 cm.

13.7. $19\frac{1}{5}$ cm lub $3\frac{1}{3}$ cm.

Wskazówka: Możliwe są dwa przypadki **I przypadek**



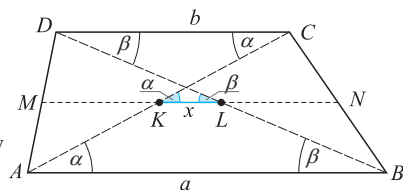
II przypadek



13.8. $\frac{a-b}{2}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Zauważ, że $|KN| = \frac{a}{2}$ i $|LN| = \frac{b}{2}$ jako odcinki łączące środki boków trójkątów ABC i DBC oraz $|KL| = |KN| - |LN|$.

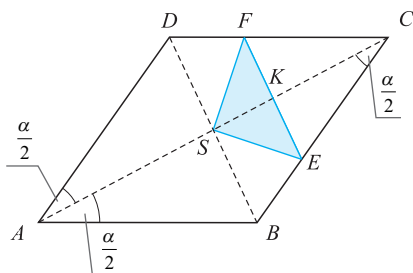


13.9. $P = \frac{3}{25}a^2 \sin \alpha$.

Wskazówka: Z warunków zadania $|DF| = |BE| = \frac{2}{5}a$.

$|SK| = \frac{2}{5}|SC| = \frac{2}{5}a \cos \frac{\alpha}{2}$, $|FK| = \frac{3}{5}|DS| = \frac{3}{5}a \sin \frac{\alpha}{2}$.

$P = |SK| \cdot |FK|$, więc $P = \frac{6}{25}a^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

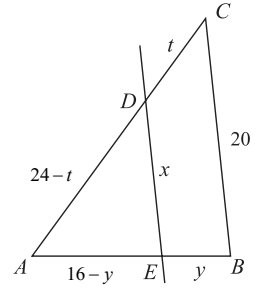
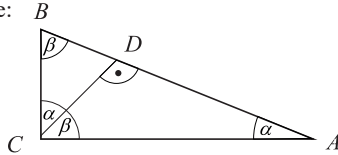


13.10. AB : 12 i 4. AC : 18 i 6.

Wskazówka: $|AD| = |DC| + |BC| + |EB|$, więc $16 - y + 24 - t = t + 20 + y$,

skąd $t = 10 - y$. $\frac{20}{x} = \frac{16}{16 - y}$ i $\frac{20}{24} = \frac{x}{24 - t}$, czyli
$$\begin{cases} \frac{20}{x} = \frac{16}{16 - y} \\ \frac{20}{24} = \frac{x}{14 + y} \end{cases}$$

13.11. **Wskazówka:** Zauważ, że:



13.12. a) $x = 4$, b) $x = 8$, c) $x = 1,6$.

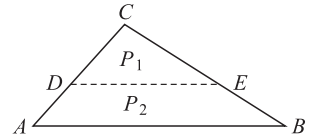
Wskazówka: Zauważ, że:

a) $x^2 = 2 \cdot 8$, b) $x^2 = 4 \cdot 16$, c) $4^2 = x \cdot 10$.

13.13. $\sqrt{2} + 1$.

Wskazówka: Zauważ, że pole trójkąta DEC jest równe polu

trapezu $ABED$. Ponieważ $DE \parallel AB$, to trójkąty ABC i DEC są podobne (kkk).



Z treści zadania wynika, że $\frac{P_{\Delta DEC}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}$, czyli skala podobieństwa $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\Delta ABC \sim \Delta DEC$, więc

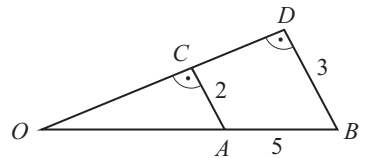
$$\frac{|DC|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ czyli } |DC| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}}.$$

Ponieważ $|AD| = |AC| - \frac{|AC|}{\sqrt{2}}$, to $\frac{|DC|}{|AD|} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$.

13.14. $|OB| = 15$, $|OC| = 4\sqrt{6}$, $|CD| = 2\sqrt{6}$.

Wskazówka: Trójkąty ACO i BDO są podobne (kkk).

$$|OB| = |OA| + 2 + 3, \text{ gdzie } \frac{|OA|}{2} = \frac{|OA| + 5}{3}.$$



13.15. Wskazówka: Przyjmij, że $b > a > 0$ i $|OA| = x$. Ponieważ $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|BD|}$, gdzie $|OB| = x + a + b$, czyli

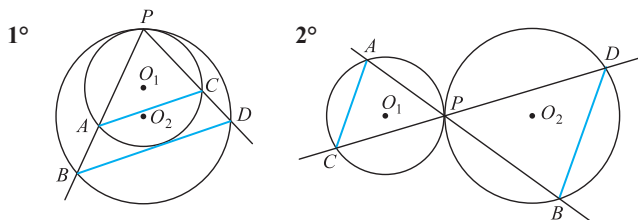
$$\frac{x}{x+a+b} = \frac{a}{b}, \text{ więc } x = \frac{a(a+b)}{b-a}.$$

a) Trójkąt ACO jest prostokątny, $\sin \alpha = \frac{a}{x}$, więc $\sin \alpha = \frac{b-a}{b+a}$,

b) $|OC| = \sqrt{|OA|^2 - |AC|^2}$, więc $|OC| = \sqrt{\frac{a^2(a+b)^2}{(b-a)^2} - a^2}$, zatem

$$|OC| = \frac{a}{b-a} \sqrt{(b+a)^2 - (b-a)^2} = \frac{2a}{b-a} \sqrt{ab}.$$

13.16. Wskazówka: Możliwe są dwa przypadki.



Zauważ, że $AC \parallel BD$

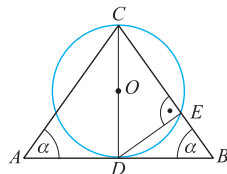
13.17. b) $P = 12$.

Wskazówka: $\triangle CDB \sim \triangle CDE$ (kkk). $\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|CE|}{|CD|}$, stąd $|CD|^2 = |CE| \cdot |CB|$.

Z warunku zadania $\frac{|CE|}{|EB|} = \frac{16}{9}$, więc można przyjąć, że $|CE| = 16x$ i $|EB| = 9x$,

gdzie $x > 0$, stąd $|CB| = |CE| + |EB|$, czyli $|CB| = 25x$.

Zatem $|CD|^2 = 16x \cdot 25x$, czyli $16 = 16 \cdot 25x^2$, więc $x = \frac{1}{5}$.



13.18. Wskazówka: Sprawdź, że $\triangle OAD \equiv \triangle OCB$ (bkb), $\triangle ABS \equiv \triangle CDS$ (kbk) i $\triangle OBS \equiv \triangle ODS$ (bkb).

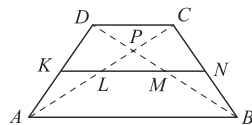
13.19. b) $\alpha = 36^\circ$.

13.20. Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku, gdzie $|AB| = 3|CD|$

oraz $|KL| = \frac{1}{2}|DC|$ i $|MN| = \frac{1}{2}|DC|$ (z twierdzenia Talesa). Ponieważ KN jest

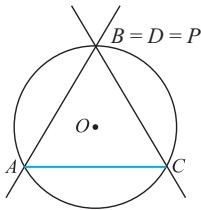
odcinkiem łączącym środki ramion trapezu, więc $KN \parallel AB \parallel CD$ i $|KN| = \frac{|DC| + |AB|}{2} = 2|DC|$,

$|LM| = |KN| - (|KL| + |MN|)$, stąd $|LM| = |DC|$. Zatem $|KL| : |LM| : |MN| = \frac{1}{2}|DC| : |DC| : \frac{1}{2}|DC| = 1 : 2 : 1$.

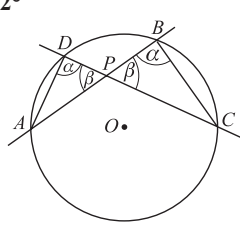


13.21. Wskazówka: Możliwe są trzy przypadki.

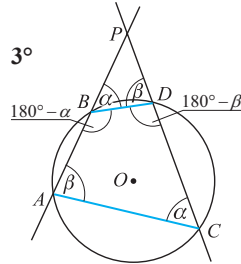
1°



2°



3°



1° $\triangle ACP \equiv \triangle BDP$,

2° $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC|$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku, $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle CPB|$ jako kąty wierzchołkowe.

3° Jeżeli $|\sphericalangle PBD| = \alpha$, to $|\sphericalangle ABD| = 180^\circ - \alpha$, więc $|\sphericalangle ACD| = \alpha$ (bo suma kątów przeciwległych czworokąta wpisanego w okrąg jest równa 180°).

Analogicznie wykazujemy, że $|\sphericalangle BDP| = |\sphericalangle BAC|$.

13.22. Wskazówka: Okrąg opisany na pięciokącie foremnym $ABCDE$ jest także okręgiem opisanym np. na czworokącie $EBCD$. Zatem czworokąt $EBCD$ jest trapezem równoramiennym o ramionach długości a i krótszej podstawie też długości a . b) Ponieważ $AC \parallel ED$ i $EB \parallel DC$, więc czworokąt $EFCD$ jest rombem. Zatem

$|FC| = |DC| = a$. c) Korzystając z tego, że trójkąty równoramienne CEF i ABF są podobne, otrzymujemy

proporcję $\frac{|EC|}{|AB|} = \frac{|FC|}{|FA|}$, czyli $\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a}$, gdzie $d > a > 0$, stąd otrzymujemy równanie kwadratowe

$d^2 - ad - a^2 = 0$, którego wyróżnik Δ jest równy $5a^2$. Zatem $d_1 = \frac{a+a\sqrt{5}}{2}$ i $d_2 = \frac{a-a\sqrt{5}}{2}$.

13.23. Wskazówka: Wystarczy uzasadnić, że trójkąt AKS jest równoramienny.

Zauważ, że $|\sphericalangle AKC| = |\sphericalangle ABC| = \beta$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku).

$|\sphericalangle AEC| = 180^\circ - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)$, więc $|\sphericalangle ASE| = 180^\circ - |\sphericalangle AEC| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

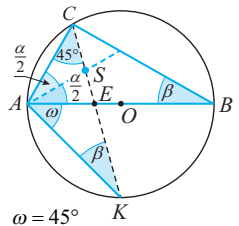
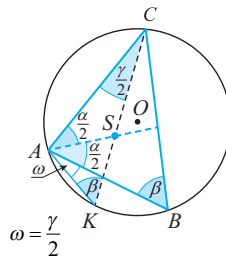
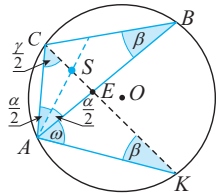
W trójkącie ABC : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ oraz

w trójkącie AKC : $\frac{\gamma}{2} + \alpha + \omega + \beta = 180^\circ$, więc $\omega = \frac{\gamma}{2}$.

Zatem $|\sphericalangle ASE| = |\sphericalangle SAK| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, czyli trójkąt AKS jest

równoramienny i $|KA| = |KS|$. Analogicznie dowodzimy,

gdy trójkąt jest ostrokątny lub prostokątny.

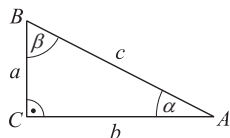


13.24. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku $a < b$.

$\frac{b-a}{c} = \frac{1}{2}$ i $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$, więc $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$ i $c = 2(b-a)$. Z twierdzenia Pitagorasa:

$(b \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 + b^2 = 4(b - b \operatorname{tg} \alpha)^2$, skąd $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$ lub $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$ i $\alpha < \beta$, bo $a < b$.



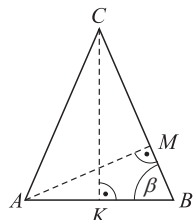
13.25. $\cos \beta = \sqrt{2} - 1$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

W $\triangle ABM$: $|AM| = |AB| \cdot \sin \beta$, w $\triangle CKB$: $|CK| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \operatorname{tg} \beta$.

Z treści warunków zadania: $|AB|^2 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot |AB| \cdot \sin \beta$, skąd

$\operatorname{tg} \beta \cdot \sin \beta = 2 \Leftrightarrow \cos^2 \beta + 2 \cos \beta - 1 = 0$.



13.26. a) $r = \frac{2\sqrt{15}}{5}$,

b) $R = \frac{16\sqrt{15}}{15}$,

c) $\frac{2}{5}$ lub $\frac{5}{2}$.

13.27. $R = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$.

13.28. a) $x = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \beta}$, b) $P_{CKLM} = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów

13.29. $y = 104$ km.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

Z twierdzenia cosinusów $y = \sqrt{120^2 + 56^2 - 2 \cdot 120 \cdot 56 \cdot \cos \alpha}$.

13.30. $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Wskazówka: Oznacz boki trójkąta $2x, 3x, 4x$, gdzie $x > 0$.

Oblicz kąt α , który leży na przeciw boku $4x$.

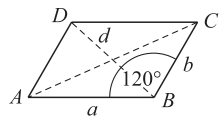
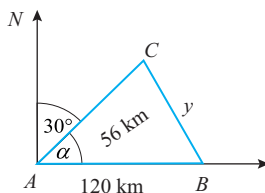
$(4x)^2 = (2x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \cos \alpha$, skąd $\cos \alpha = \frac{4x^2 + 9x^2 - 16x^2}{12x^2}$, czyli $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

13.31. $P = 9\sqrt{3}$, $d = 3\sqrt{3}$.

Wskazówka: Przyjmij $|DB| = d$, $|AC| = 3\sqrt{7}$, $|AB| = a = b + 3$,

$|BC| = b$. Z twierdzenia cosinusów otrzymasz równanie $b^2 + 3b - 18 = 0$, gdzie

$b > 0$, skąd $b = 3$, więc $a = 6$.



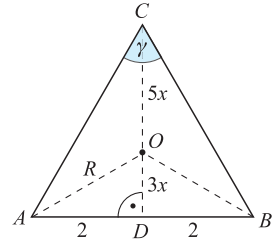
13.32. $\sin \gamma = 0,8$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, gdzie O

jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC o promieniu $R = 5x$ i $x > 0$.

W $\triangle ADO$: $R^2 = 2^2 + (3x)^2$, stąd $x = \frac{1}{2}$. Zatem $R = \frac{5}{2}$, a z twierdzenia

$$\text{sinusów } \frac{4}{\sin \gamma} = 2 \cdot \frac{5}{2}.$$



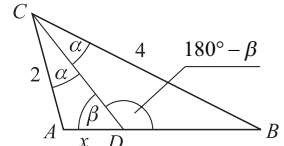
13.33. 1 i 2.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku. Z twierdzenia

sinusów dla trójkątów ADC i BDC : $\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \beta}$ i $\frac{3-x}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin(180^\circ - \beta)}$,

gdzie $x \in (0; 3)$. Dzieliąc otrzymane równości stronami otrzymasz równanie

$$\frac{x}{3-x} = \frac{2}{4}, \text{ skąd } x = 1.$$

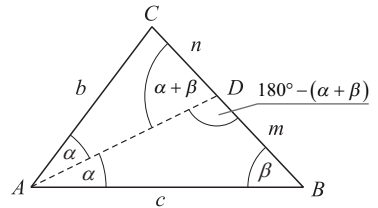


13.34. **Wskazówka:** Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Z warunków zadania: $a = m + n$. Z twierdzenia sinusów dla $\triangle ABD$

oraz $\triangle ADC$: $\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin[180^\circ - (\alpha - \beta)]}$ oraz $\frac{n}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(\alpha - \beta)}$.

Dzieliąc otrzymane równości stronami otrzymasz: $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$.



Ponieważ $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ i $m + n = a$, stąd $m = \frac{ac}{b+c}$ i $n = \frac{ab}{b+c}$.

cnw.

13.35. $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, oraz $a = n$,

$b = n+1$, $c = n+2$ ($n \in \mathbb{N}^+$) i $\gamma = 2\alpha$, gdy $a \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Z twierdzenia sinusów: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{n+2}{\sin 2\alpha}$, więc $\cos \alpha = \frac{n+2}{2n}$.

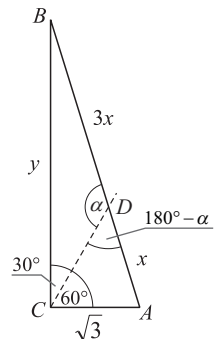
Z twierdzenia cosinusów $n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2) \cdot \frac{n+2}{2n}$, więc $n^2 - 3n - 4 = 0$.

13.36. $|AB| = 2\sqrt{21}$, $|BC| = 9$, $|CD| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Z twierdzenia sinusów: 1° $\frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \alpha}$, skąd $x \cdot \sin \alpha = \frac{3}{2}$.

$$2^\circ \frac{3x}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{16x^2 - 3}}{\sin \alpha}, \text{ skąd } x = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$



13.37. Wskazówka: Z twierdzenia sinusów: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, skąd $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

$$\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + 1 = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \beta}. \quad \text{cnw.}$$

13.38. $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$.

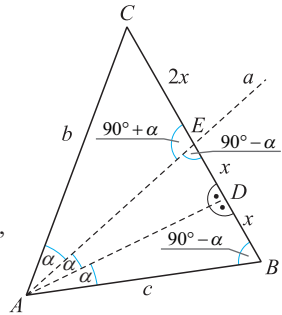
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$\triangle ADB \equiv \triangle ADE$, więc $|\angle ABD| = |\angle ADE| = 90^\circ - \alpha$ i $|BD| = |ED| = x$, skąd

$|CE| = 2x$ i $|\angle AEC| = 90^\circ + \alpha$ oraz $|\angle C| = 90^\circ - 2\alpha$.

W $\triangle ADC$: $b = \frac{3x}{\sin 2\alpha}$ i z twierdzenia sinusów w $\triangle AEC$: $\frac{b}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{2x}{\sin \alpha}$,

więc $\frac{\frac{3x}{\sin 2\alpha}}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{2x}{\sin \alpha}$, skąd $\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$, czyli $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem $\alpha = 30^\circ$ lub $\alpha = 150^\circ$ i $3\alpha < 180^\circ$.



13.39. $P_{\triangle ABC} = 2\sqrt{10\,010}$.

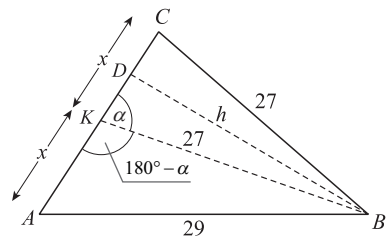
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na

rysunku, gdzie $|\angle CKB| = \alpha$, skąd $|\angle AKB| = 180^\circ - \alpha$.

Z twierdzenia cosinusów dla $\triangle ABK$ i $\triangle BCK$:

$$27^2 = x^2 + 27^2 - 54x \cdot \cos \alpha, \quad 29^2 = x^2 + 27^2 + 54x \cdot \cos \alpha.$$

Dodając obie równości stronami otrzymujemy $x^2 = 56$. Z twierdzenia Pitagorasa dla $\triangle BDC$: $h^2 = 715$.

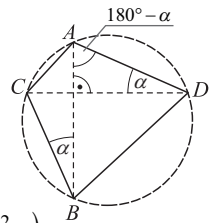


13.40. Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Zauważ, że $|\angle CBA| = |\angle CDA| = \alpha$. $AB \perp CD$, więc $|\angle BAD| = |\angle BCA| = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Z twierdzenia sinusów: $\frac{|AC|}{\sin \alpha} = 2R$ i $\frac{|BD|}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = 2R$, skąd $|AC| = 2R \sin \alpha$

i $|BD| = 2R \cos \alpha$. Zatem $|AC|^2 + |BD|^2 = 4R^2 \cdot \sin^2 \alpha + 4R^2 \cdot \cos^2 \alpha = 4R^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$.



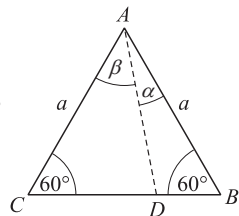
13.41. a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{14}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{21}}{7}$, **b)** $\frac{R_1}{R_2} = 1$.

Wskazówka: a) Przyjmij oznaczenia jak na rysunku. $|CD| = \frac{2|CB|}{3} = \frac{2}{3}a$, $|DB| = \frac{1}{3}a$,

b) Niech: R_1 – promień okręgu opisanego na $\triangle ACD$, R_2 – promień okręgu

opisanego na $\triangle ADB$. Z twierdzenia sinusów dla trójkątów ACD i ADB :

$$2R_1 = \frac{|AD|}{\sin 60^\circ} \quad \text{i} \quad 2R_2 = \frac{|AD|}{\sin 60^\circ}, \quad \text{skąd wniosek, że } R_1 = R_2.$$



$$13.42. \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{KOAA}} = \frac{2}{\pi} \sin \alpha \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku. $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

z twierdzenia sinusów: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ i $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} a \cdot b \sin(\alpha + \beta) = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

$$13.43. 3 : 5 : 7.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Z twierdzenia cosinusów otrzymasz równanie

$$(a + 2r)^2 = a^2 + (a + r)^2 - 2a \cdot (a + r) \cdot \cos 120^\circ, \text{ skąd}$$

$$2a^2 - ar - 3r^2 = 0, \text{ gdzie } a > 0 \text{ i } r > 0 \text{ i } \Delta = 25r^2.$$

$$\text{Zatem } a + r = \frac{5}{2}r \text{ i } a + 2r = \frac{7}{2}r.$$

$$13.44. \text{ a) } \cos \alpha = \frac{11}{12},$$

$$\text{ b) } P = \frac{\sqrt{23}}{2},$$

$$\text{ c) } d = \sqrt{2}.$$

Wskazówka: a) Przyjmij oznaczenia,

jak na rysunku, gdzie $a = |BC| = \sqrt{3}$, $b = |AC| = 3$, $c = |AB| = 4$ i $|\sphericalangle BAC| = \alpha$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC : $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, skąd $\cos \alpha = \frac{11}{12}$.

$$\text{ b) } P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha, \text{ gdzie } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

$$\text{ c) } Z \text{ twierdzenia cosinusów dla trójkąta } ADC: d = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - c \cdot b \cdot \cos \alpha}.$$

13.45. **Wskazówka:** Zastosuj dwukrotnie twierdzenie cosinusów i oblicz długości: ramienia trójkąta $\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$ oraz środkowej AD .

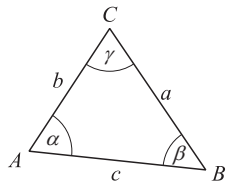
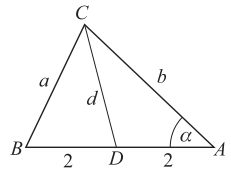
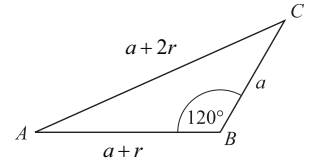
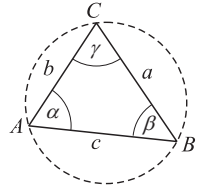
$$13.46. \text{ Wskazówka: } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ (z tw. cosinusów) oraz } \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \beta}, \text{ więc}$$

$$\frac{2abc}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{2abc}{a^2 + c^2 - b^2}, \text{ skąd } b^2 = a^2.$$

$$13.47. \text{ Wskazówka: } Z \text{ twierdzenia sinusów: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ skąd } \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

$$Z \text{ twierdzenia cosinusów } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma, \text{ skąd } 2 \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}.$$

$$\text{Zatem } \frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}, \text{ skąd } b^2 = c^2, \text{ czyli } a = b. \quad \text{cnnw.}$$



13.48. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}}$ lub $c = \sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}}$.

Wskazówka: $P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{4}ab$, skąd $\sin \gamma = \frac{1}{2}$, więc $\gamma = 30^\circ$ lub $\gamma = 150^\circ$.

Z twierdzenia cosinusów oblicz długość trzeciego boku c .

13.49. $x = \frac{3}{2}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, gdzie $a > b > 0$,

więc $\frac{a}{b} > 1$. Z warunków zadania: $\frac{a}{b} = x$ i $\frac{|AC|^2}{|BD|^2} = \frac{19}{7}$.

Skorzystaj z twierdzenia cosinusów dla ΔACD i ΔABC , :

$$\frac{|AC|^2}{|BD|^2} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{a^2 + b^2 - ab} = \frac{ab\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)}{ab\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right)} = \frac{x + \frac{1}{x} + 1}{x + \frac{1}{x} - 1} = \frac{19}{7}, \text{ gdzie } x = \frac{a}{b}.$$

13.50. $d = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

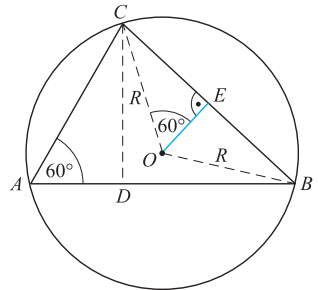
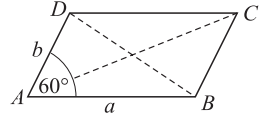
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku,

gdzie $|OE| = d$, $|CB| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$. Z warunków zadania:

$$b + c = 26 \text{ i } 40\sqrt{3} = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin 60^\circ, \text{ stąd } b = 10 \text{ i } c = 16.$$

$$\text{Z twierdzenia cosinusów: } a^2 = 10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \cos 60^\circ, \text{ stąd } a = 14.$$

$$\text{Z twierdzenia sinusów: } \frac{14}{\sin 60^\circ} = 2R, \text{ stąd } R = \frac{14\sqrt{3}}{3}. |\sphericalangle BOC| = 2 \cdot |\sphericalangle BAC| = 120^\circ. \text{ W trójkącie prostokątnym } COE \text{ mamy } \cos 60^\circ = \frac{d}{R}.$$



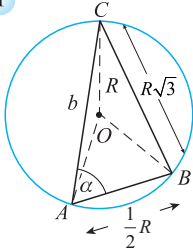
13.51. $\frac{3\sqrt{5}+1}{4}R$ lub $\frac{3\sqrt{5}-1}{4}R$.

Wskazówka: α – kąt leżący naprzeciw boku trójkąta, który ma długość $R\sqrt{3}$, wtedy $\frac{R\sqrt{3}}{\sin \alpha} = 2R$,

skąd $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $\alpha = 60^\circ$ lub $\alpha = 120^\circ$. Zatem możliwe są dwa przypadki.

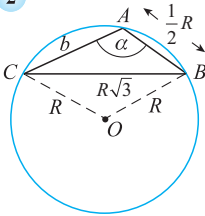
Z twierdzenia cosinusów:

1



$$(R\sqrt{3})^2 = b^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{1}{2}R \cdot \cos 60^\circ$$

2



$$(R\sqrt{3})^2 = b^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{1}{2}R \cdot \cos 120^\circ$$

13.52. a) $|CD| = 2$, b) $R_1 = 2R_2$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

a) $|AB| = \sqrt{3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ} = 3\sqrt{7}$.

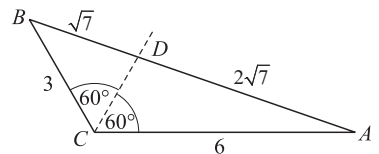
Z twierdzenia o dwusiecznej $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$, $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{6}{3} = 2$, skąd $\frac{3\sqrt{7} - |BD|}{|BD|} = 2$, więc $|BD| = \sqrt{7}$.

Z tw. cosinusów dla $\triangle DBC$ i $\triangle ACD$: $(\sqrt{7})^2 = 3^2 + |CD|^2 - 2 \cdot 3 \cdot |CD| \cdot \cos 60^\circ$, skąd $|CD| = 2$ lub $|CD| = 1$,

oraz $(2\sqrt{7})^2 = 6^2 + |CD|^2 - 2 \cdot 6 \cdot |CD| \cdot \cos 60^\circ$, skąd $|CD| = 2$ lub $|CD| = 4$.

b) Skorzystaj z wzoru na pole $\triangle ADC$: $P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \sin 60^\circ$ i $P_\Delta = \frac{|AC| \cdot |AB| \cdot |DC|}{4R_1}$ i oblicz R_1 .

Postępuj analogicznie dla $\triangle DBC$ i oblicz R_2 .



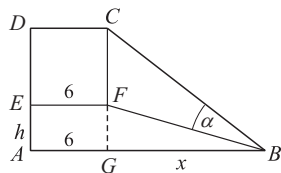
13.53. a) $L = 48$, b) $\cos(\sphericalangle CBF) = \frac{19\sqrt{17}}{85}$.

Wskazówka: a) Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$$P_{\Delta CFB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x = 36, \text{ skąd } x = 12. \quad P_{ABFE} = \frac{12+x}{2} \cdot h = 36 \quad (P_{EFCD} = 36),$$

więc $h = 3$.

b) Z twierdzenia cosinusów dla ΔCFB oblicz $\cos \alpha$.



Kąty w okręgu i związki miarowe między odcinkami stycznych

13.54. **Wskazówka:** $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ADC| = 45^\circ$, więc $|\widehat{AC}| = |\widehat{BD}|$.

13.55. $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$.

Wskazówka: $(s \perp OA)$ i $|\sphericalangle AOC| = 140^\circ$ oraz $|OA| = |OC|$.

13.56. **Wskazówka:** Zauważ, że $|\sphericalangle EFG| = |\sphericalangle ABC|$ (ramiona kątów EFG i ABC zawarte są w prostych równoległych). Jeżeli kąty wpisane mają równe miary, to są one oparte na cięciwach te samej długości.

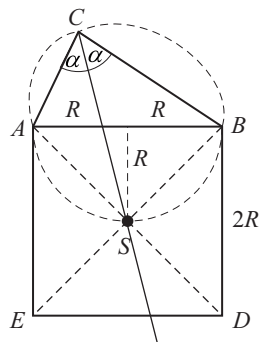
13.57. **Wskazówka:** ΔASB jest prostokątny i równoramienny,

gdzie $|AS| = |SB|$ oraz łuki $\widehat{AS}$ i $\widehat{SB}$ mają równe długości.

• $\sphericalangle ACS$ jest oparty na łuku $\widehat{AS}$.

• $\sphericalangle SCB$ jest oparty na łuku $\widehat{SB}$,

które mają równe długości, więc $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle SCB| = \alpha$. cnnw.



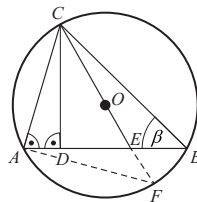
13.58. **Wskazówka:** Zauważ, że odcinek AM jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie $ANMC$, a odcinek MN jest cięciwą tego okręgu, na której oparte są kąty wpisane NAM i NCM .

13.59. **Wskazówka:** Przez punkt C prowadzi średnicę CF .

Zauważ, że $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle AFC| = \beta$, jako kąty ostre wpisane

oparte na tej samej cięciwie AC (łuku $\widehat{AC}$)

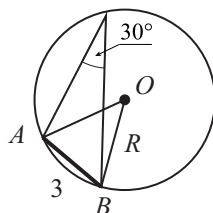
Zatem $|\sphericalangle AFC| = 90^\circ - \beta$ i $|\sphericalangle DCB| = 90^\circ - \beta$.



- 13.60. a) 6π , b) 36, c) 4π .

Wskazówka: a) Po obliczeniu miary kąta środkowego, oblicz długość okręgu.

W trójkącie AOB z twierdzenia cosinusów oblicz R , gdzie $|\sphericalangle AOB| = 60^\circ$.



- 13.61. a) 24π , b) π .

Wskazówka: a) $|\sphericalangle AOB| = 120^\circ$, b) $|\sphericalangle COB| = 120^\circ$.

13.62. **Wskazówka:** $\frac{h}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, skąd $x = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}$ oraz $\frac{l+h}{x} = \operatorname{tg} 2\alpha$, skąd $x = \frac{l+h}{\operatorname{tg} 2\alpha}$, więc $\frac{l+h}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{l+h}{\operatorname{tg} 2\alpha}$, gdzie

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \text{ skąd } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{h+l}{x}.$$

$$\text{Zatem } \frac{\frac{2h}{\frac{x}{x^2 - h^2}}}{x^2} = \frac{h+l}{x} \Leftrightarrow 2h = (h+l) \left[1 - \left(\frac{h}{x} \right)^2 \right] \Leftrightarrow \left(\frac{h}{x} \right)^2 = \frac{l-h}{h+l} \Leftrightarrow x^2 = \frac{h+l}{l-h} \cdot h^2.$$

Czworokąt wpisany w okrąg i czworokąt opisany na okręgu.

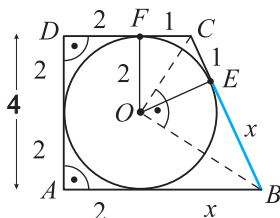
- 13.63. a) $30^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 150^\circ$, b) $90^\circ, 80^\circ, 90^\circ, 100^\circ$.

- 13.64. a) 4, b) $5\frac{3}{5}$, c) $3r$.

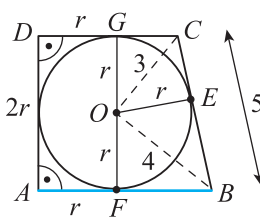
Sumy przeciwległych boków są różne.

Wskazówka:

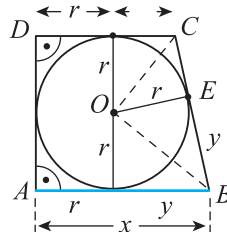
a)



b)



c)



b) Pole trójkąta prostokątnego BCO jest równe $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r$ oraz równe $\frac{3 \cdot 4}{2}$, więc $\frac{5}{2}r = 6$.

c) W trójkącie prostokątnym COB : $r^2 = \frac{1}{2}r \cdot y$, skąd $y = 2r$, więc $x = r + 2r$.

- 13.65. a) 11, b) 12.

Wskazówka: Sumy długości przeciwległych boków są równe.

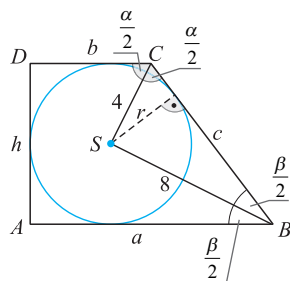
13.66. $P_{\Delta ABCD} = 57,6$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

ΔCSB – prostokątny, bo $\alpha + \beta = 180^\circ$, więc $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$.

Zatem $|\sphericalangle CSB| = 90^\circ$, $c = |BC| = 4\sqrt{5}$.

$$P_{\Delta CSB} = \frac{1}{2} r \cdot c \text{ i } P_{\Delta CSB} = \frac{1}{2} 4 \cdot 8, \text{ skąd } r = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ i } h = 2r = \frac{16\sqrt{5}}{5}.$$



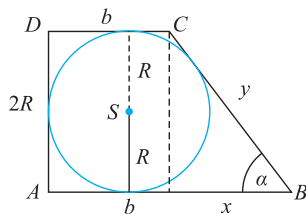
13.67. $L = \frac{4R}{\sin \alpha} (\sin \alpha + 1)$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku. $\frac{2R}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, skąd

$$x = \frac{2R}{\operatorname{tg} \alpha}, \frac{2R}{y} = \sin \alpha, \text{ skąd } y = \frac{2R}{\sin \alpha}. \quad 2R + y = 2b + x, \text{ skąd}$$

$$b = \frac{2R + y - x}{2} = \frac{R}{\sin \alpha} (\sin \alpha + 1 - \cos \alpha)$$

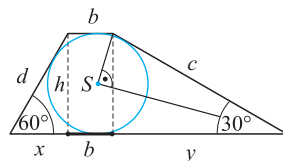
$$\text{ i } a = \frac{R}{\sin \alpha} (\sin \alpha + 1 + \cos \alpha).$$



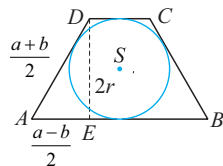
13.68. $\frac{L}{h} = \frac{4}{3} (3 + \sqrt{3})$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

$$d + c = 2b + x + y, \text{ gdzie } y = \sqrt{3} \cdot h, x = \frac{\sqrt{3}}{3} h, c = 2h \text{ i } d = \frac{2\sqrt{3}}{3} h.$$



13.69. **Wskazówka:** Należy wykazać, że $4r^2 = ab$, gdzie r to promień okręgu wpisanego w trapez, a i b to długości podstaw trapezu.

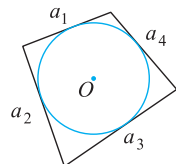


13.70. **Wskazówka:** Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku. $r = 0$, więc boki czworokąta mają długości $a_1 = a$, $a_2 = a + r$, $a_3 = a + 2r$, $a_4 = a + 3r$.

Z własności czworokąta opisanego na okręgu $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$, skąd $r = 0$, więc

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4.$$

c.n.w.



13.71. $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$, $P_{ABCD} = 10(\sqrt{5} + 1)$.

Wskazówka: Oś symetrii jest prostą prostopadłą do prostej

o równaniu $2x + y = 0$, która przechodzi przez środek okręgu $S = (3, 4)$,

co wynika z równania okręgu zapisanego w postaci $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

o promieniu $r = 5$. $h = \frac{|0-10|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$, $|CD| = 2 \cdot a = 2\sqrt{5}$.

13.72. $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, gdzie $|\sphericalangle MAB| = \alpha$, $|OA| = |OB| = r$.

W czworokąt wypukły $OBMK$ można wpisać okrąg, gdy $\otimes |OB| + |KM| = |OK| + |MB|$.

$|\sphericalangle AMB| = \frac{\pi}{2}$ (kąt wpisany oparty na średnicy), więc $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

W $\triangle AMB$: $|MB| = 2r \sin \alpha$, $|AM| = 2r \cos \alpha$. W $\triangle AOK$: $|OK| = r \operatorname{tg} \alpha$, $|AK| = \frac{r}{\cos \alpha}$.

Zatem $|KM| = |AM| - |AK| = 2r \cos \alpha - \frac{r}{\cos \alpha}$. Podstawiając powyższe związki do równości $\otimes$ otrzymasz:

$$r + 2r \cos \alpha - \frac{r}{\cos \alpha} = r \operatorname{tg} \alpha + 2r \sin \alpha, \text{ skąd } \cos \alpha + \cos 2\alpha = \sin \alpha + \sin 2\alpha.$$

Rozwiązując równanie trygonometryczne, otrzymasz odpowiedź.

13.73. **Wskazówka:** Zauważ, że $|\sphericalangle AMD| = |\sphericalangle BMA| = |\sphericalangle BMC| = 45^\circ$ (kąty wpisane,

którym odpowiada kąt środkowy o mierze 90°). W trójkątach prostokątnych DBM

i ACM : $|DM|^2 + |MB|^2 = (2R)^2$ i $|MC|^2 + |AM|^2 = (2R)^2$.

13.74. a) $80^\circ, 120^\circ, 40^\circ, 120^\circ$,

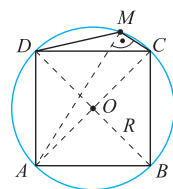
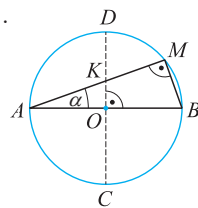
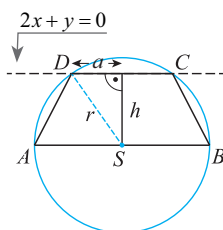
b) w czworokąt można wpisać okrąg, bo $|\sphericalangle DMB| = \frac{\pi}{2}$, ale nie można na nim opisać okręgu.

Wskazówka: Czworokąt jest deltoidem.

13.75. a) $P = 16\pi$, b) 4, 8, 16, 12.

Wskazówka: a) Skorzystaj z wzoru $P = \frac{r \cdot L}{2}$, gdzie L to obwód czworokąta,

r – to promień okręgu wpisanego w czworokąt.

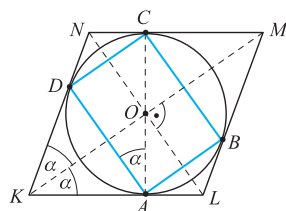


$$13.76. \text{ a) } a = \frac{4\sqrt{3}}{3}r, \quad d_1 = 4r, \quad d_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}r, \quad \text{ b) } \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, gdzie

$$|KL| = |LM| = |MN| = |NK| = a, \quad |AB| = |DC| = c \quad \text{ i } \quad |AD| = |BC| = d_2, \quad |KM| = d_1,$$

$$|NL| = d_2 \quad \text{ i } \quad d_1 > d_2, \quad |CA| = h = 2r.$$



a) Zauważ, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem i jego boki są równoległe do przekątnych rombu $KLMN$.

$$|\sphericalangle OKL| = |\sphericalangle DAC|, \text{ jako kąty o ramionach odpowiednio prostopadłych,}$$

więc trójkąty prostokątne OKL i DAC są podobne.

$$P_1 = 4P_{\triangle OKL} \quad \text{ i } \quad P_2 = 2P_{\triangle DAC} \quad \text{ oraz } \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{8}{3}, \quad \text{ więc } \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{4P_{\triangle OKL}}{2P_{\triangle DAC}}, \quad \text{ zatem } \quad \frac{P_{\triangle OKL}}{P_{\triangle DAC}} = \frac{4}{3}.$$

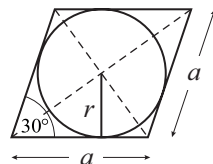
Wniosek: trójkąty OKL i DAC są podobne w skali k równej $\sqrt{\frac{4}{3}} : \frac{2}{\sqrt{3}}$, więc $\frac{|KL|}{|AC|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, czyli $\frac{a}{h} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Po $\frac{h}{a} = \sin 2\alpha$, gdzie $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, więc $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zatem $2\alpha = 60^\circ$.

$$13.77. \text{ b) } \frac{P_1}{P_2} = \frac{8}{\pi}.$$

Wskazówka: a) $2a \sin 15^\circ$, a , $2a \cos 15^\circ$ – to trzy kolejne wyrazy

ciągu geometrycznego, ponieważ $\frac{d_1}{2a} = \sin 15^\circ$, $\frac{d_2}{2a} = \cos 15^\circ$.



$$13.78. \quad P = 5a^2.$$

Wskazówka: Trapez wpisany w okrąg jest równoramienny, a w trapezie opisanym na okręgu suma długości ramion jest równa sumie długości podstaw.

$$13.79. \quad P = \frac{8}{3}\sqrt{14} \text{ cm}^2.$$

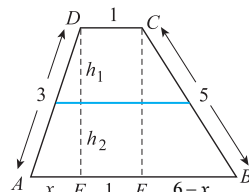
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku. Z warunku zadania:

1° $a + b = 8$, więc długość odcinka łączącego środki ramion jest równa

$$\frac{a+b}{2} = 4 \quad (\text{bo w trapez można wpisać okrąg}) \quad \text{ oraz } \quad h_1 = h_2 = r, \quad \text{ bo}$$

$$h = |DF| = 2r \quad \text{ i } \quad \frac{h_1}{h_2} = 1,$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} b + \frac{a+b}{2} \cdot r \\ \frac{2}{a+b} \cdot r \\ a + \frac{a+b}{2} \cdot r \\ \frac{2}{a+b} \cdot r \\ a+b=8 \end{cases}, \quad \text{ więc } \quad \begin{cases} \frac{3b+a}{3a+b} = \frac{5}{11}, \\ a+b=8 \end{cases}, \quad \text{ skąd } \quad \begin{cases} a=7 \\ b=1 \end{cases}.$$

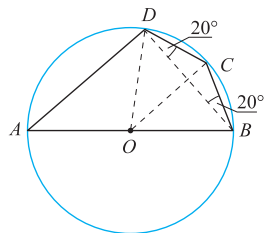
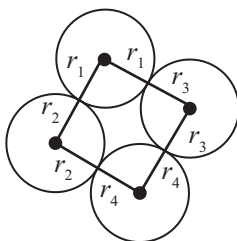


$$\text{W trójkątach prostokątnych } AFD \text{ i } CEB: \quad \begin{cases} h^2 + (6-x)^2 = 25 \\ h^2 + x^2 = 9 \end{cases}, \quad \text{ skąd } \quad x = \frac{5}{3} \quad \text{ i } \quad h = \frac{2}{3}\sqrt{14}.$$

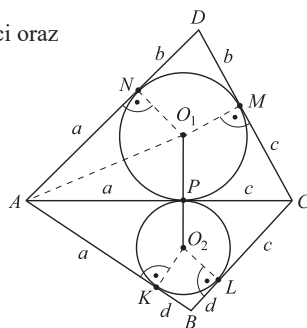
13.80. 40° , 70° , 140° , 110° .

Wskazówka: Czworokąt $OBCD$ jest deltoidem, bo prosta OC jest dwusieczną kąta BCD .

13.81. **Wskazówka:** Wystarczy wykazać, że sumy długości przeciwległych boków są równe.



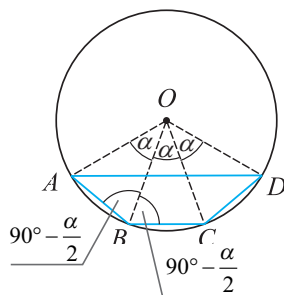
13.82. **Wskazówka:** Odcinki styczne są równej długości oraz sumy boków przeciwległych są równe.



13.83. **Wskazówka:** Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Wyznacz miary kątów ABC i BCD w zależności od środkowego kąta α

i wykaż, że $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle CDA|$.



13.84. $r = \frac{3}{2}$; $R = \frac{10}{3}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku oraz

$$|AB| = a, |DC| = b, |AD| = |BC| = c, |DB| = d = 5\text{cm}, |DE| = h, |DO_2| = R,$$

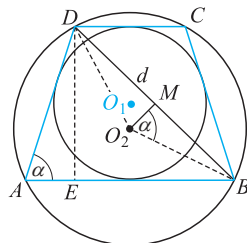
$$|AE| = \frac{a-b}{2}, |EB| = \frac{a+b}{2}. \text{ Trapez jest opisany na okręgu o promieniu } r,$$

więc $h = 2r$ i $a + b = 2c$. Stąd $c = \frac{a+b}{2} = 4$.

$$\text{Z twierdzenia Pitagorasa: } h = \sqrt{d^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{2}.$$

Zauważ, że $|\sphericalangle DO_2B| = 2|\sphericalangle DAB| = 2\alpha$ (z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, opartym na tym

samym łuku). W $\triangle O_2MB$: $\frac{d}{2R} = \sin \alpha$, skąd $R = \frac{d}{2\sin \alpha}$. W $\triangle AED$: $\sin \alpha = \frac{h}{c} = \frac{3}{4}$, więc $R = \frac{10}{3}$.



13.85. a) $\cos \alpha = -\frac{5}{7}$, b) $\sin(\pi - \alpha) = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, c) $P_{ABCD} = 2\sqrt{6}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

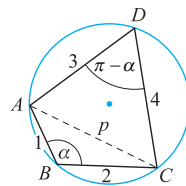
Z własności czworokąta wpisanego w okrąg $|\sphericalangle CDA| = \pi - \alpha$.

Z twierdzenia cosinusów dla $\triangle ABC$: $p^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos \alpha$ oraz

$\triangle ACD$: $p^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos(\pi - \alpha)$. Z równości $5 - 4 \cos \alpha = 25 + 24 \cos \alpha$ obliczamy $\cos \alpha = -\frac{5}{7}$.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, gdzie $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, więc $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{49}}$.

$$P_{ABCD} = P_{\triangle ABC} + P_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin(\pi - \alpha).$$



13.86. $L = 14\sqrt{3} + 3\sqrt{21}$, $P = \frac{189\sqrt{3}}{4}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Zauważ, że trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym (bo $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - 120^\circ$

i $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ACB|$). Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest również okręgiem

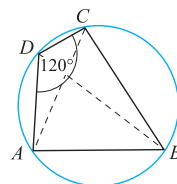
opisanym na trójkącie równobocznym ABC , więc bok tego trójkąta ma długość równą $7\sqrt{3}$.

$|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$, więc $|\sphericalangle ADB| = 60^\circ$ (jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku).

Z warunku $\frac{P_{\triangle ADB}}{P_{\triangle BCD}} = \frac{2}{1}$ wynika, że $\frac{\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |DB| \cdot \sin 60^\circ}{\frac{1}{2} \cdot |DC| \cdot |DB| \cdot \sin 60^\circ} = 2$, skąd $|AD| = 2|DC|$. Stosując twierdzenie

cosinusów do $\triangle ACD$ otrzymujemy równanie $(7\sqrt{3})^2 = |AD|^2 + |DC|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |DC| \cdot \cos 120^\circ$, skąd

$|DC| = \sqrt{21}$, zatem $|AD| = 2\sqrt{21}$.



13.87. $\frac{189}{2}, \frac{21}{2}, \frac{63}{2}, \frac{63}{2}$ lub $\frac{384}{7}, \frac{216}{7}, \frac{288}{7}, \frac{288}{7}$.

Wskazówka: Zauważ, że istnieją dwa przypadki opisanego

trapezu $ABCD$ na okręgu. Przyjmij oznaczenia jak na rysunkach, gdzie

$|AF| = x$, $|FG| = z$, $|GB| = y$ i wtedy $|AB| = x + z + y$. Wysokość trapezu

$h = h_1 + h_2$, gdzie h_1 – wysokość $\triangle DOC$,

h_2 – wysokość $\triangle AOB$. $|DF| = |CG| = h = 2R$.

Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu, więc jego wysokość $h = 2R$, gdzie

R – długość promienia okręgu oraz $|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$.

Zatem $|AB| + |DC| = 28$, (bo $|AD| = 15$, $|BC| = 13$), $x + y + z + z = 28$, więc $x + y + 2z = 28$.

$$P_{ABCD} = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot h, \text{ a z warunków zadania } P_{ABCD} = 168, \text{ więc } h = 12.$$

1° Stosując twierdzenie Pitagorasa w trójkątach prostokątnych: $\triangle AFD$: $x^2 = 15^2 - 12^2 = 81$, skąd $x = 9$,

$\triangle BGC$: $y^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, skąd $y = 5$. Ponieważ $x + y + 2z = 28$, więc $z = 7$.

Z podobieństwa trójkątów DCO i ABO wynika, że $\frac{h_1}{h_2} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$, stąd $h_1 = 3$ i $h_2 = 9$. Przekątne trapezu

dzielią go na cztery trójkąty, których pola: $P_{\triangle ABO} = \frac{|AB| \cdot h_2}{2} = \frac{21 \cdot 9}{2} = \frac{189}{2}$; $P_{\triangle DCO} = \frac{|DC| \cdot h_1}{2} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$;

$$P_{\triangle BCO} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle ABO} = \frac{21 \cdot 12}{2} - \frac{189}{2} = \frac{63}{2}; \quad P_{\triangle ADO} = P_{\triangle DCA} - P_{\triangle DCO} = \frac{7 \cdot 12}{2} - \frac{21}{2} = \frac{63}{2}.$$

2° Postępując podobnie jak w przypadku 1°, otrzymamy: $P_{\triangle ABO} = \frac{384}{7}$; $P_{\triangle DCO} = \frac{216}{7}$; $P_{\triangle BCO} = \frac{288}{7}$.

13.88. $P = \frac{9 + 6\sqrt{3}}{2}$.

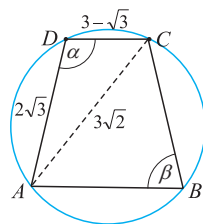
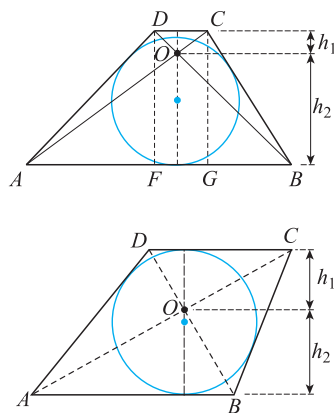
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

Z twierdzenia cosinusów dla $\triangle ACD$: $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, więc $\alpha = 120^\circ$.

Zatem $\beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, czyli $\triangle ABC$ jest równoboczny.

Zauważ, że $P_{ABCD} = P_{\triangle CDA} + P_{\triangle ABC}$, gdzie $P_{\triangle CDA} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot (3 - \sqrt{3}) \cdot \sin 120^\circ$,

$$P_{\triangle ABC} = \frac{(3\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$



13.89. Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku, gdzie $|AB| = a$, $|DC| = b$, $|AD| = |BC| = c$. Zauważ, że:

- $2c + a + b = l$ i $2c = a + b$, skąd $c = \frac{l}{4}$.
- $|EB| = \frac{a-b}{2}$, więc $|AE| = c = \frac{l}{4}$.
- $\left(\frac{l}{4}\right)^2 + (2r)^2 = d^2$, skąd $r = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{8}$..
- $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2r = ar$ i $P_{\triangle ABC} = \frac{acd}{4R}$, więc $ar = \frac{acd}{4R}$ i $c = \frac{l}{4}$, i $r = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{8}$.

$$\text{Zatem } a \cdot \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{8} = \frac{a \cdot \frac{l}{4} \cdot d}{4R}, \text{ skąd } R = \frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}.$$

13.90. $k = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $k = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku. Zauważ, że:

- SB i SC są dwusiecznymi odpowiednio kątów ABC i BCD , czyli $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ skąd $\alpha + \beta = 90^\circ$, więc $\angle BSC = 90^\circ$.

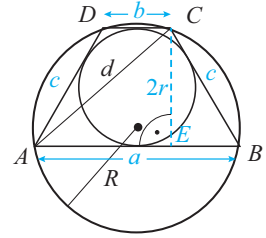
- $\triangle BPS \sim \triangle BSC$ (*kkk*) (trójkąty BPS i BSC są prostokątne o kątach: $\alpha, \beta, 90^\circ$).

- $|CG| = 4$, więc $|GB| = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

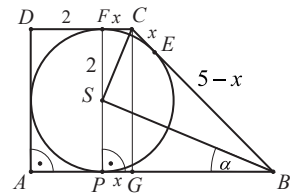
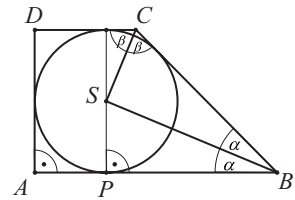
- $|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$, czyli $(2 + x + 3) + (2 + x) = 4 + 5$,

więc $x = 1$.

- $k = \frac{|SB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{2^2 + (1+3)^2}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $k = \frac{|BC|}{|SB|} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.



cnw.



13.91. $S_1 = (-4, -3)$ i $S_2 = (6, 7)$.

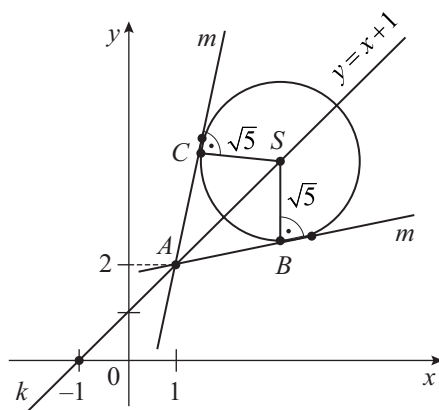
Wskazówka: Zauważ, że:

- $S = (x, x+1)$ i $A \in k$.
- $|AS| > 5$, czyli $\sqrt{(x-1)^2 + (x+1-2)^2} > \sqrt{5}$, skąd

$$x \in \left(-\infty; 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(2 + \frac{\sqrt{10}}{2}; +\infty\right).$$
- $|AB| = |AC| = m$, więc $P_{\Delta BCS} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \sqrt{5}$

i $P_{ABSC} = 15$, skąd $m = 3\sqrt{5}$.

- $|AS| = \sqrt{m^2 + (\sqrt{5})^2}$, czyli $|AS| = 5\sqrt{2}$.
- $(x-1)^2 + (x+1-2)^2 = 50$, skąd $x = -4$, $x = 6$.
- $S_1 = (-4, -3)$, $S_2 = (6, 7)$.



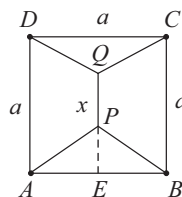
Zadania optymalizacyjne z elementami rachunku różniczkowego z planimetrii

13.92. Suma długości dróg jest równa $L(x) = 4a + x + 4\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-x}{2}\right)^2}$ i $x \in (0; a)$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku. Z warunków zadania:

$$PQ \parallel BC, PQ \perp AB \text{ oraz } |AE| = |EB| = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Zauważ, że } |PE| = \frac{a-x}{2} \text{ i skąd } |PB| = \sqrt{EB^2 - (PE)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-x}{2}\right)^2}.$$

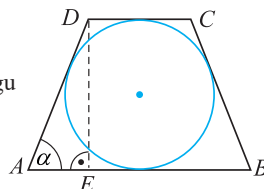


13.93. $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$.

Wskazówka: Oznacz $|\sphericalangle DAE| = \alpha$, gdzie $\alpha \in (0; \pi)$ i $|DE| = 2r$.

W trójkącie ADE: $|AD| = \frac{2r}{\sin \alpha}$. Z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu

wynika, że $|AB| + |DC| = 2|AD|$ i stąd $P = \frac{2|AD|}{2} \cdot 2r$, czyli $P = \frac{4r^2}{\sin \alpha}$.



Pole będzie najmniejsze, jeżeli wartość sinusa będzie największa, czyli gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

13.94. $x = \frac{a}{2}$,

gdzie $P(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3x^2 - 3ax + a^2)$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku. Z warunków

zadania: $a = |AB| = |BC| = |AC|$; $x = |AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$.

Zauważ, że $\triangle A_1B_1C_1$ jest trójkątem równobocznym, którego pole

$P_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Z twierdzenia cosinusów:

$b^2 = x^2 + (a-x)^2 - 2x(a-x) \cdot \cos 60^\circ = 3x^2 - 3ax + a^2$.

$P(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3x^2 - 3ax + a^2)$, gdzie $x \in (0; a)$. Funkcja $P(x)$ jest funkcją kwadratową zmiennej x , więc ma

ona najmniejszą wartość dla $x = \frac{3a}{2 \cdot 3} = \frac{a}{2}$ (współrzędne wierzchołka wykresu funkcji P).

13.95. $K = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

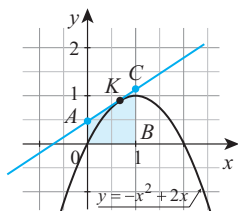
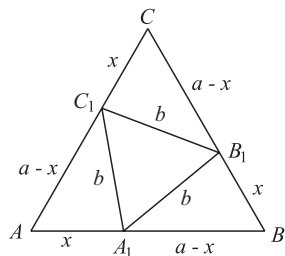
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Punkt K należy do paraboli, więc $K = (p, -p^2 + 2p)$. Styczna AP ma

równanie $y = (2-2p)x + p^2$. Zatem wierzchołki trapezu $AOBC$ mają

współrzędne $O = (0, 0)$, $A = (0, p^2)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, p^2 - 2p + 2)$. $P_{AOBC} = \frac{1}{2}(|OA| + |BC|) \cdot |OB|$, więc

$P_{AOBC}(p) = p^2 - p + 1$, $P_{MAX} = P\left(\frac{1}{2}\right)$, bo $p = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$.



13.96. Dla $|AB| = \frac{8}{3}$ i $|AD| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Wskazówka: Przyjmij $A = (x, 0)$ i $x \in (0; 2)$,

wtedy $B = (x, 4 - x^2)$, $C = (-x, 4 - x^2)$, $D = (-x, 0)$.

Pole prostokąta $ABCD$: $P = |AB| \cdot |AD|$, więc $P(x) = 2(4x - x^3)$ dla $x \in (0; 2)$.

$P'(x) = 2(4 - 3x^2)$ i $x \in (0; 2)$, więc $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} P'(x) > 0, \text{ gdy } x \in \left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ P'(x) < 0, \text{ gdy } x \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{więc } P_{MAX} = P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

x	$\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2\right)$
$P'(x)$	+	0	-
$P(x)$		MAX	

$|AB| = \sqrt{0^2 + (4 - x^2)^2} = 4 - x^2$, czyli $|AB| = 4 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$.

13.97. $P_{ABCD} = P_{MAX} = P(3) = 4$.

Wskazówka: $P_{MAX} = P(3) = 4$. $A = (x, 3)$ i $x \in (2; 2 + \sqrt{3})$, wtedy

$B = (x, (x - 2)^2)$ i $K = (2, (x - 2)^2)$ (bo $y_B = y_K$).

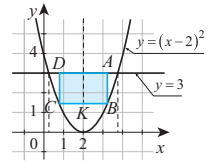
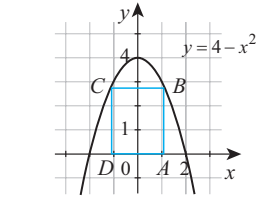
Pole $P_{ABCD} = 2 \cdot |KB| \cdot |AB|$, więc $P(x) = 2(x - 2)[3 - (x - 2)^2] =$

$= 2(-x^3 + 6x^2 - 9x + 2)$, gdzie $x \in (2; 2 + \sqrt{3})$.

$P'(x) = 2(-3x^2 + 12x - 9)$, $P'(x) = 0$ i $x \in (2; 2 + \sqrt{3})$, więc $x = 3$.

$P'(x) > 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 > 0 \Leftrightarrow x \in (2; 3)$.

$P'(x) < 0$, gdy $x \in (3; 2 + \sqrt{3})$, więc $P_{MAX} = P(3) = 4$.



x	$(2; 3)$	3	$(3; 2 + \sqrt{3})$
$P'(x)$	+	0	-
$P(x)$		MAX 4	

13.98. $x + y - 4 = 0$.

Wskazówka: Punkt $A = (x, 0)$ jest punktem przecięcia szukanej prostej

z osią x , a punkt $B = (0, y)$ z osią y . Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

Zauważ, że warunki zadania są spełnione, gdy: $x > 2$, $y > 2$, $|OA| = x$

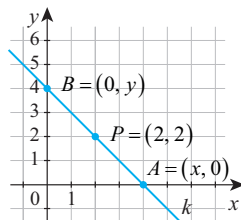
i $|OB| = y$. Współczynnik kierunkowy m szukanej prostej k wyraża się związku-

mi: $m_1 = -\frac{y}{x}$ lub $m_2 = \frac{2}{2-x}$, więc $y = \frac{2x}{x-2}$, bo $m_1 = m_2$.

$f(x) = |OA| + |OB| = x + \frac{2x}{x-2}$, gdzie $x > 2$. $f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$ i $x \in (2; +\infty)$.

$f'(x) < 0$, gdy $x \in (2; 4)$ i $f'(x) > 0$, gdy $x > 4$, więc $y_{MIN} = f(4)$. Prosta k przechodzi przez punkty

$A = (4, 0)$ i $B = (0, 4)$, więc $m_{AB} = -1$, zatem prosta k ma równanie $y = -x + 4$.



13.99. $C = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

Wskazówka: Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty $A = (-2, -2)$, $B = (-1, -4)$, $C = \left(x, \frac{4}{x}\right)$ i $x > 0$.

$$P_{\Delta ABC} = \left| \frac{2}{x} + x + 3 \right|.$$

Pole P trójkąta ABC jest najmniejsze,

gdy funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{2}{x} + x + 3$ ma wartość najmniejszą dla $x > 0$.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 1.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$; $f'(x) < 0$, gdy $x \in (0; \sqrt{2})$; $f'(x) > 0$, gdy $x \in (\sqrt{2}; +\infty)$, więc $P_{MIN} = P(\sqrt{2})$.

Zatem punkt $C = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

13.100. $x = \frac{R}{2}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku, gdzie

$$|AB| = |A_1B_1| = a \text{ i } a \in (0; 2R),$$

$$|OD| - |OD_1| = x \text{ i } x \in (0; R),$$

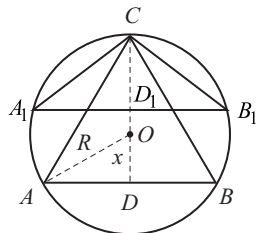
$$|CD| = R + x, \quad |CD_1| = R - x.$$

Zauważ, że możliwe są dwa przypadki, czyli $P_1 = \frac{a}{2}(R-x)$ lub $P_2 = \frac{a}{2}(R+x)$,

gdzie P_i ($i=1, 2$) oznacza pole trójkąta ABC . Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa i wyznacz $\frac{a}{2} = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$P_1(x) = (R-x)\sqrt{R^2-x^2} \quad \text{lub} \quad P_2(x) = (R+x)\sqrt{R^2-x^2}, \text{ gdzie } x \in \langle 0; R \rangle.$$

$$P_1'(x) = \frac{(x-R)(2x+R)}{\sqrt{R^2-x^2}} \quad \text{lub} \quad P_2'(x) = \frac{(x+R)(R-2x)}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$



x	$(0; R)$
P_1'	—
P_1	

lub

x	$\left(0; \frac{R}{2}\right)$	$\frac{R}{2}$	$\left(\frac{R}{2}; R\right)$
P_2'	+	0	0
P_2		$P_{2\max}$	

Funkcja P_1 jest malejąca dla $x \in (0; R)$, więc osiąga wartość największą dla $x = 0$ (trójkąt ABC jest wtedy

trójkątem równoramiennym o przeciwprostokątnej $|AB| = 2R$. Funkcja P_2 osiąga wartość największą dla $x = \frac{R}{2}$

(trójkąt ABC jest wtedy trójkątem równobocznym o boku $R\sqrt{3}$). Porównując pola trójkąta prostokątnego

równoramiennego oraz trójkąta równobocznego wpisanych w okrąg o promieniu R uzyskasz odpowiedź.

13.101. Trójkąt o bokach długości: $\frac{2}{3}R$, R , $\frac{4}{3}R$, $P_{MAX} = P\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{2}{9}R^2$.

Wskazówka: W trójkącie o bokach długości a , b , c przyjmij oznaczenia:

$a = x$, $b = 2x$, $c = 3R - 3x$, ($a + b + c = 3R$), więc

$$P_{\Delta} = \frac{abc}{4R}, \text{ czyli } P(x) = \frac{x \cdot 2x \cdot (3R - 3x)}{4R} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2R}x^3.$$

Ustal dziedzinę D_p funkcji P z nierówności trójkąta:

$$D_p: \begin{cases} x < 2x + (3R - 3x) \\ 2x < x + (3R - 3x) \\ 3R - 3x < x + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2}R \\ x < \frac{3}{4}R \\ x < \frac{1}{2}R \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}R; \frac{3}{4}R\right).$$

Uzasadnij, że funkcja P ma wartość największą.

$$\bullet P'(x) = 3x - \frac{9}{2R}x^2 \text{ i } x \in \left(\frac{1}{2}R; \frac{3}{4}R\right).$$

$$\bullet P'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - \frac{9}{2R}x^2 = 0, \text{ skąd } x = 0 \text{ lub } x = \frac{2}{3}R.$$

$$\text{oraz } 0 \notin \left(\frac{1}{2}R; \frac{3}{4}R\right), \frac{2}{3}R \in \left(\frac{1}{2}R; \frac{3}{4}R\right).$$

$$\bullet \left. \begin{aligned} P'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2R}x^3 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}R; \frac{2}{3}R\right) \\ P'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in \left(\frac{2}{3}R; \frac{3}{4}R\right) \end{aligned} \right] \Rightarrow P\left(\frac{2}{3}R\right) = P_{\max}.$$

$$\bullet P\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}R\right)^2 - \frac{3}{2R} \cdot \left(\frac{2}{3}R\right)^3 = \frac{2}{3}R^2 - \frac{4}{9}R^2 = \frac{2}{9}R^2$$

x	$\left(\frac{1}{2}R; \frac{2}{3}R\right)$	$\frac{2}{3}R$	$\left(\frac{2}{3}R; \frac{3}{4}R\right)$
P'	+	0	-
P		$P_{\max}$	

13.102. $L_{MAX} = L\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 5 + 5\sqrt{2}$.

Wskazówka:

Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

- Zauważ, że $y = \sqrt{25 - x^2}$, gdzie $x \in (0; 5)$.

Obwód $L(x) = x + 5 + \sqrt{25 - x^2}$ i $x \in (0; 5)$.

- $L'(x) = 1 + \frac{(-2x)}{2\sqrt{25 - x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$.

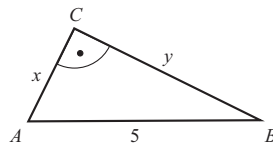
- $L'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = 1$, skąd $\frac{x^2}{25 - x^2} = 1$, więc

$$x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ lub } x = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ i } \frac{5\sqrt{2}}{2} \in (0; 5).$$

- Zauważ, że gdy x zbliża się do swych skrajnych wartości krańcowych, czyli do 0^+ i do 5^- , to obwód L trójkąta zbliża się do wartości 10. Otrzymasz wtedy trójkąt, w którym jedna z przyprostokątnych niemal pokrywa się z przeciwprostokątną AB .

$$L\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 5 + 5\sqrt{2} > 10, \text{ więc}$$

funkcja L musi osiągnąć maksimum pomiędzy wartościami skrajnymi.



13.103. $x = R\sqrt{2}$, $y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, $P_{MAX} = P(R\sqrt{2})$,

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku,

gdzie $|AB| = x$, $|AD| = y$, $|OD| = R$, $x \in (0; 2R)$, $y \in (0; R)$.

a) Zauważ, że:

- $y^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = R^2$, skąd $y = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - x^2}$, gdzie $x \in (0; 2R)$.

- $P_{ABCD} = xy = \frac{1}{2}x\sqrt{4R^2 - x^2}$, czyli $P(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2(4R^2 - x^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{-x^4 + 4R^2x^2}$. **end.**

b)

- $P'(x) = \frac{-4x^3 + 8R^2x}{4\sqrt{-x^4 + 4R^2x^2}} = \frac{-x^3 + 2R^2x}{\sqrt{-x^4 + 4R^2x^2}}$.

- Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji f .

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 8R^2x = 0, \text{ więc } x = 0 \text{ lub } x = R\sqrt{2}, \text{ lub } x = -R\sqrt{2}.$$

Tylko $R\sqrt{2} \in (0; 2R)$, więc funkcja P może mieć największą wartość dla $x = R\sqrt{2}$.

- Warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji f .

$$\left. \begin{array}{l} P'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0; R\sqrt{2}) \\ P'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (R\sqrt{2}; 2R) \end{array} \right\} \Rightarrow P_{\max}(R\sqrt{2}).$$

- Funkcja P ma maximum, czyli $P_{MAX} = P(R\sqrt{2})$.

$$y = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(R\sqrt{2})^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

13.104. $x = 20$, $P_{MAX} = f_{\max} = f(20)$.

Wskazówka: Zauważ, że:

- $h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{x-10}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 + 20x + 300} = \frac{1}{2}\sqrt{(x+10)(30-x)}$,

gdzie $x \in (0; 30)$.

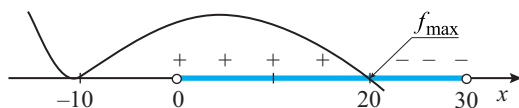
- $P(x) = \frac{10+x}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(x+10)(30-x)} = \frac{1}{4}\sqrt{(x+10)^3(30-x)}$.

- Pole P ma największą wartość, gdy funkcja $f(x) = (x+10)^3(30-x)$ osiąga maksimum.

$$f'(x) = 3(x+10)^2 \cdot (30-x) + (x+10)^3 \cdot (-1) = (x+10)^2(80-4x), \text{ gdy } x \in (0; 30).$$

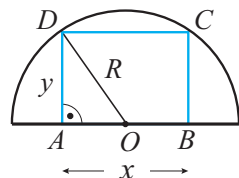
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20$.

- Wykres znaku pochodnej.

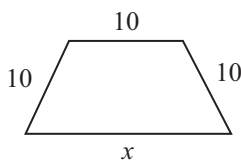


Pochodna zmienia znak w otoczeniu $x = 20$, więc w tym punkcie funkcji f osiąga maksimum.

$$P_{MAX} = f_{\max} = f(20).$$



x	$(0; R\sqrt{2})$	$R\sqrt{2}$	$(R\sqrt{2}; 2R)$
P'	+	0	-
P	$\nearrow$	$P_{\max}$	$\searrow$

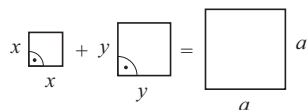


13.105. $x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $L_{MAX} = L\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}a$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia: x, y – długości boków kwadratów.

Zauważ, że:

- $x^2 + y^2 = a^2$, skąd $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, gdzie $x \in (0; a)$.



- $L(x) = 4x + 4\sqrt{a^2 - x^2}$, gdy $x \in (0; a)$.

- $L'(x) = 4 + 4 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$, gdy $x \in (0; a)$.

- $L'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{a^2 - x^2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

bo $x = \sqrt{a^2 - x^2}$, czyli $x^2 = a^2 - x^2$, więc $x^2 = \frac{a^2}{2}$, skąd $x = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tylko $\frac{a\sqrt{2}}{2} \in (0; a)$, więc funkcja L może mieć wartość największą dla $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} L(x) = 4a$.

- $L\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}a$ i $4\sqrt{2}a > 0$, więc funkcja L musi osiągnąć maksimum pomiędzy skrajnymi

wartościami 0 i a .

- $y = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ i $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

13.106. a) $m = 3$, $f_{\min} = f(m) = f(3)$.

Wskazówka:

a) Długości promieni okręgów są liczbami dodatnimi, więc $4 - m > 0$ i $m - 2 > 0$, skąd $m \in (2; 4)$.

$$f(m) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{4-m}} + \frac{1}{\sqrt{m-2}}.$$

$$f'(m) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{(4-m)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(m-2)^2}} \right]; \quad f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

m	$(2; 3)$	3	$(3; 4)$
$f'(m)$	—	0	+
$f(m)$		2 $f_{\min}$	

$f_{\min} = f_{\min} = f(3) = 2$, czyli suma odwrotności długości promieni danych okręgów jest najmniejsza dla $m = 3$.

b) Aby wykazać prawdziwość nierówności $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geq r_1 + r_2$, zauważ, że gdy $m \in (2; 4)$, to jest ona

równoważna nierówności $\frac{1}{r_1 \cdot r_2} \geq 1$, skąd $r_1 \cdot r_2 \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(4-m)(m-2)} \leq 1$.

Badając funkcję $g(m) = \sqrt{(4-m)(m-2)}$ dla $m \in (2; 4)$ otrzymasz:

$$g'(m) = \frac{3-m}{\sqrt{(4-m)(m-2)}} \text{ i } g'(3) = 0, \text{ więc } g_{\max} = g(3) = 1, \text{ czyli } \sqrt{(4-m)(m-2)} \leq 1.$$

Zatem $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geq r_1 + r_2$. *end.*