2. Logarytmy

Logarytmy

2.1. a) $7^{\log_7 2-\frac{1}{3}}$, $10^{\log\frac{9}{4}}$, $\sqrt{9}^{\log_3\frac{10}{\sqrt{4}}}$, b) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_3 5}}+49^{\frac{1}{\log_4 7}}}$, $36^{\log_6 5-\frac{1}{4}}$, $2^{5-\frac{1}{3}\log_2 27}$.

Wskazówka:

a) $10^{\log\frac{9}{4}}=\frac{9}{4}$, $\left(\sqrt{9}\right)\log_3\frac{10}{\sqrt{4}}=3^{\log_3 5}$, $7^{\log_7 2-\frac{1}{3}}=7^{\log_7 2}\cdot 7^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{7}}$

b) $36^{\log_6 5-\frac{1}{4}}=36^{\log_6 5}\cdot 36^{-\frac{1}{4}}=6^{\log_6 25}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}$, $2^{5-\frac{1}{3}\log_2 27}=2^5\cdot 2^{-\frac{1}{3}\log_2 27}=32\cdot 2^{\log_2\frac{1}{3}}$,

$\sqrt{25^{\frac{1}{\log_3 5}}+49^{\frac{1}{\log_4 7}}}=\sqrt{5^{2\log_5 3}+7^{2\log_7 4}}=\sqrt{9+16}$.

2.2. a) 0, b) 0, c) 1, d) -1, e) $\frac{1}{2}$, f) $4+\log_2 9$.

Wskazówka:

c) $\log 5\cdot\log 20+(\log 2)^2=\log 5\cdot(\log 5+2\log 2)+(\log 2)^2=(\log 5)^2+2\log 2\cdot\log 5+(\log 2)^2=$
$=(\log 5+\log 2)^2$.

2.3. a) $3\frac{1}{2}$, b) 3, c) 27, d) 5.

Wskazówka: Zauważ, że:

c) $10^{1-\log 5}=10\cdot 10^{\log\frac{1}{5}}$,

d) $\sqrt{8^{2\log_8 13}-6^{2\log_6 12}}=\sqrt{8^{\log_8 169}-6^{\log_6 144}}=\sqrt{169-144}$.

2.4. a) $a\in\boldsymbol{R}^+$; 0, b) $a\in\boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$, $b\in\boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$; 0,

c) $a\in\boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$, $b\in\boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$; $\log_b a$, d) $n\in\boldsymbol{N}^+$; $\log(n+1)$.

Wskazówka:

a) $2^{\frac{\log a}{2\log\sqrt{2}}}=2^{\frac{\log a}{\log 2}}=2^{\log_2 a}=a$ oraz $a^{1+\frac{1}{\log_4 a^2}}=a\cdot a^{\frac{1}{\log_4 a^2}}=a\cdot a^{\log_{a^2} 4}=a\cdot a^{\log_a 2}=a\cdot 2$,

b) $\log_b^4 a+\log_a^4 b+2=\left(\log_b^2 a+\log_a^2 b\right)^2-2\cdot\log_b^2 a\cdot\log_a^2 b+2=\left(\log_b^2 a+\log_a^2 b\right)^2$,

c) $\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}=\log_a(\log_b a)$, e) $64^{\log_8 13}-36^{\log_6 12}=8^{\log_8 13^2}-6^{\log_6 12^2}$.

2.5. **a)** $\frac{2a+b}{2}$, **b)** $\frac{3a-b+5}{a-b+1}$.

Wskazówka:

a) $\log_{25}48=\frac{\log_5 48}{\log_5 25}=\frac{\log_5\left(4^2\cdot 3\right)}{\log_5 5^2}=\frac{2\log_5 4+\log_5 3}{2\log_5 5}$,

b) $\log_2 360=\frac{\log_3 360}{\log_3 2}=\frac{\log_3\left(2^3\cdot 3^2\cdot 5\right)}{\log_3 2}$ oraz

- $\log_3 15=b$, skąd $\log_3 5=b-1$
- $\log_3 20=a$, czyli $2\log_3 2+\log_3 5=a$,więc $2\log_3+b-1=a$, skąd $\log_3 2=\frac{a-b+1}{2}$.

Zatem $\log_2 360=\frac{3\log_3 2+2+\log_3 5}{\log_3 2}$.

2.6. **a)** $\frac{2a-2}{2-a}$, **b)** $\frac{4a}{1-a}$, **c)** $\frac{2-4a}{3a-6}$.

Wskazówka: Zauważ, że:

a) $\log_{49}16=\frac{\log_7 2^4}{\log_7 7^2}=\frac{4\log_7 2}{2}=2\log_7 2$. Z równości $\log_{14}28=a$ wyznacz $\log_7 2$,

czyli $\log_{14}28=\frac{\log_7(7\cdot 4)}{\log_7(7\cdot 2)}=\frac{\log_7 7+\log_7 2^2}{\log_7 7+\log_7 2}=\frac{1+2\log_7 2}{1+\log_7 2}=a$, skąd $\log_7 2=\frac{a-1}{2-a}$.

b) $\log_{12}2=\frac{\log_3 2}{2\log_3 2+1}=a$, skąd $\log_3 2=\frac{a}{1-2a}$ oraz $\log_6 16=\frac{\log_3 2^4}{\log_3(2\cdot 3)}=\frac{4\log_3 2}{\log_3 2+1}$,

c) $\log_{12}18=\frac{\log_9(2\cdot 9)}{\log_9\left(2^2\cdot 3\right)}=\frac{1+\log_9 2}{2\log_9 2+\frac{1}{2}}=a$, skąd $\log_9 2=\frac{\frac{1}{2}a-1}{1-2a}$ oraz $\log_8 9=\frac{1}{\log_9 2^3}=\frac{1}{3\log_9 2}$.

2.7. $a^{-b}=8^{-2}=\frac{1}{64}$.

Wskazówka: $5^{\frac{\log_{100}3}{\log 3}}=5^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{\log_{100}5}{\log 5}}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{36-16\sqrt{5}}=\sqrt[4]{\left(4-2\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{\left|4-2\sqrt{5}\right|}=\sqrt{2\sqrt{5}-4}$.

2.8. *Wskazówka:* $\frac{4+1}{\log\left(2-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)\right)-1}=\frac{5}{\log 1-1}=\frac{5}{-1}$.

2.9. *Wskazówka:* Zauważ, że $\left(\log_3 5\right)^{-1}+\left(\log_7 5\right)^{-1}=\log_5 3+\log_5 7=\log_5 21$ i $\log_5 5<\log_5 21<\log_5 25$.

2.10. *Wskazówka:* Zauważ, że $\frac{2}{\log_{(\pi+a)}10}=2\log(\pi+a)$. Nierówność zapisz w postaci:

$[\log(\pi a)]^2+[\log(\pi+a)-1]^2\geq 0$. Suma kwadratów dwóch liczb jest nieujemna. ***cnw.***

2.11. ***Wskazówka:*** **a)** $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 = 3\log_2 5$ i $\log_{125} 8 = \frac{3}{3\log_2 5}$, **b)** $\frac{1}{\log_2 7} = \log_7 2$ i $\frac{1}{\log_3 7} = \log_7 3$.

2.12. ***Wskazówka:*** $\log_2 a = 1$, więc $a = \frac{1}{2}$ oraz $\log_4 b = -1$, więc $b = \frac{1}{4}$ i $\log_9 c = -1$, więc $c = \frac{1}{9}$.

Zatem $\sqrt{abc} = \sqrt{\frac{1}{2\cdot 4\cdot 9}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$, czyli $\sqrt{abc} < 0{,}2$.

2.13. ***Wskazówka:*** $\frac{1}{\log_3 5} + \frac{1}{\log_2 5} = \log_5 3 + \log_5 2$.

2.14. ***Wskazówka:*** $16^{\log_2 3} = 2^{4\cdot\log_2 3} = 2^{\log_2 3^4} = 81$, $25^{-\log_{\frac{1}{5}} 3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2\left(-\log_{\frac{1}{5}} 3\right)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{5}} 3^2} = 9$.

2.15. ***Wskazówka:***

Skorzystaj z wzoru $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ i zastąp wszystkie logarytmy , logarytmem o podstawie 2.