1. Liczby rzeczywiste

Działania w zbiorze liczb rzeczywistych

1.1. Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe.

a) Liczba $\frac{3}{10}$ jest liczbą przeciwną do liczby $-3\frac{1}{3}$.

b) Liczba $2-\sqrt{3}$ jest odwrotnością liczby $2+\sqrt{3}$.

c) Liczba $\left|\sqrt{5}-4\right|$ jest liczbą przeciwną do liczby $\sqrt{5}-4$.

d) $1,(810)=1\frac{30}{37}$.

e) Liczba postaci $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-2\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną.

1.2. Sprawdź, czy liczby x i y są liczbami przeciwnymi (czyli $x=-y$), gdy:

a) $x=\frac{2}{3-2\sqrt{2}}+\frac{3}{3+2\sqrt{2}}$, $y=2\sqrt{2}-15$, **b)** $x=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$, $y=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

1.3. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{\sqrt{\sqrt{13}+\sqrt{12}}}{\sqrt{\sqrt{13}-\sqrt{12}}}$, **b)** $\frac{4}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, **c)** $\frac{10}{3-\sqrt[3]{7}}$, **d)** $\frac{12}{\sqrt[3]{4}+2}$.

1.4. Wyznacz odwrotność liczby x, gdy:

a) $x=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$, **b)** $x=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$,

c) $x=2-\sqrt[3]{3}$, **d)** $x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}$.

1.5. Sprawdź, czy prawdziwe są równości:

a) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$,

b) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{2}+\sqrt{7}$,

c) $\sqrt{13-2\sqrt{30}}=\sqrt{10}-\sqrt{3}$.

1.6. Uzasadnij, że jeśli $a=\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ i $b=\sqrt{5}-\sqrt{3}$, to $a=b$.

1.7. Uzasadnij, że liczba $a=\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot\left(6+\sqrt{11}\right)\cdot\left(\sqrt{22}-\sqrt{2}\right)$ jest liczbą wymierną.

1.8. Liczby naturalne dodatnie a, b, c, d spełniają warunki $\sqrt[3]{abc}=4$ i $\sqrt[4]{abcd}=2\sqrt{10}$. Oblicz wartość d.

1.9. Wykaż, że jeżeli $m=4^{\sqrt{3}+2}$ i $n=2^{\sqrt{3}+5}$, to $n=8\sqrt{m}$.

1.10. Liczby k, l, n są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi.

Wykaż, że wśród liczb postaci $\frac{k+l}{2}$, $\frac{l+n}{2}$, $\frac{n+k}{2}$ dokładnie jedna jest naturalna.

1.11. Wykaż, że liczba $11^{10}-1$ jest podzielna przez 10.

1.12. Wykaż, że gdy $n\in \boldsymbol{N}^+$, to kwadrat liczby postaci $2n+1$ zmniejszony o 1, jest liczbą podzielną przez 8.

1.13. Wykaż, że liczba postaci $2\cdot 9^{100}-9^{99}-9^{98}$ jest podzielna przez 19

1.14. Wykaż, że każda liczba postaci n^3-n, gdzie $n\in \boldsymbol{N}^+$ **,** jest podzielna przez 3.

1.15. Wykaż, że każda liczba postaci $\left(10^n+2\right)^2$, gdzie $n\in \boldsymbol{N}^+$, jest podzielna przez 9.

1.16. Liczby naturalne dodatnie a i b spełniają warunek $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{7}$. Wykaż, że iloczyn liczb a i b jest liczbą podzielną przez 7.

1.17. Wykaż, że liczba $a=291^8+3\cdot 291^4-4$ jest podzielna przez 200.

1.18. Wykaż, że liczba $3+3^2+3^3+...+3^{100}$ jest podzielna przez 4.

1.19. Wykaż, ze jeżeli liczba naturalna n jest podzielna przez 3 i nie jest podzielna przez 6, to liczba postaci n^2+7 jest podzielna przez 8.

1.20. Wykaż, że każda liczba naturalna trzycyfrowa, w której cyfra dziesiątek jest dwa razy większa niż suma cyfr setek i jedności, jest podzielna przez 3.

1.21. Wykaż, że dla każdego $m\in \boldsymbol{N}^+$ liczba postaci $\frac{3m-5}{12}\left(m^3-3m^2+2m\right)$ jest liczbą całkowitą.

1.22. Uzasadnij, że liczba:

a) postaci $2\cdot 6^{n+1}-2\cdot 3^{n+2}+6^{n+2}-2\cdot 3^{n+3}$, gdzie $n\in \boldsymbol{N}^+$ i $n\geq 4$, jest podzielna przez 24.

b) 28! jest podzielna przez 88.

c) $\binom{100}{4}$ jest podzielna przez 7.

1.23. Dwie liczby całkowite różnią się o 2. Wykaż, że różnica czwartych potęg tych liczb jest podzielna przez 8.

1.24. Wykaż, że liczba:

a) $23^6 - 15^6$ jest podzielna przez 19,

b) $101^8 - 99^8$ jest podzielna przez 400.

c) $29^{11} - 3^{11}$ jest podzielna przez 13.

1.25. Porównaj liczby x i y, gdy:

a) $x = \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} + 3 \cdot 2^{-3}\right]^{-2} + 8^{\frac{1}{3}}$, $y = \left[3\sqrt[4]{81} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\right] : 4\frac{23}{55}$,

b) $x = \sqrt[4]{5 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $y = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$.

1.26. Oblicz:

a) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^4 - 10\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$,

b) $\left[\left(6 - 2\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(6 + 20^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$,

c) $\frac{5^{17} - 25^8}{5^{16}} - \binom{7}{3} \cdot \frac{1}{5}$.

1.27. Skróć ułamek

a) $\frac{131313}{686868}$, **b)** $\frac{80808080}{91919191}$, **c)** $\frac{505505505}{711711711}$.

1.28. Wykaż, że gdy $n \in \boldsymbol{N}^+$, to liczba postaci:

a) $\frac{10^n + 2}{6}$, **b)** $\frac{10^n + 8}{9}$, **c)** $\frac{10^n - 4}{6}$,

jest liczbą naturalną.