

11. Geometria analityczna – odpowiedzi i wskazówki

Proste i figury na płaszczyźnie kartezjańskiej

11.1. a) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$, b) $\frac{3+5\sqrt{3}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Wskazówka: a) i b) Zastosuj wzór $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

c) Zastosuj wzór $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, gdzie $Ax + By + C_1 = 0$ i $Ax + By + C_2 = 0$, to równania prostych równoległych.

11.2. $P_1 = (0, 5)$, $P_2 = (-4, 1)$.

11.3. $m = -\sqrt{6}$ lub $m = \sqrt{6}$.

11.4. $m = -3\frac{1}{3}$.

Wskazówka: Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$ i wyznacz punkt przecięcia prostych.

11.5. $m = -\frac{1}{2}$ lub $m = 1$.

Wskazówka: Punkty A , B i C są współliniowe, gdy współrzędne punktu B spełniają równanie prostej AC .

11.6. a) $m = \frac{4}{5}$, b) $m_1 = -\frac{1}{4}$, $m_2 = 3$.

Wskazówka: b) Porównaj współczynniki kierunkowe prostych np. AB i BC i sprawdź dla wyznaczonych m , czy te proste mają identyczne równania

11.7. **Wskazówka:** Odpowiednie ramiona kątów zawarte są w prostych równoległych, czyli $AB \parallel EF$ i $BC \parallel DE$.

11.8. b) $3\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Wskazówka: a) Wystarczy wskazać dwie proste prostopałe,

b) wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta ABC . Zauważ, że dwie przyprostokątne są wysokościami trójkąta ABC i oblicz trzecią wysokość.

11.9. $y = 1$ i $y = 3$ lub $y = -4x + 7$ i $y = -4x + 9$.

Wskazówka: Proste l i k są równoległe, gdy mają równania $l: y = ax + b_1$, $k: y = ax + b_2$, gdzie $b_1 = 1 - 2a$, $b_2 = 3 - a$ oraz $|b_1 - b_2| = 2$, skąd $a = 0$ lub $a = -4$.

11.10. a) $P = 22$, b) $P = 16$.

Wskazówka: Zastosuj wzór na pole trójkąta ABC : $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A)|$.

11.11. a) $l: y = 4x, k: y = -x + 1,$ b) $P_1 = \left(\frac{11}{5}, \frac{44}{5}\right), P_2 = \left(-\frac{9}{5}, -\frac{36}{5}\right).$

11.12. a) $P = 13,$ b) $D = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), E = \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).$

Wskazówka: b) Punkt D jest punktem przecięcia się prostej ED i DB .

11.13. a) $m = 1,$ b) $m_1 = -2, m_2 = 6.$

Wskazówka: a) $\begin{cases} m+3 \neq 0 \\ m^2+2m-3=0 \end{cases},$ b) $\begin{cases} m+6 \neq 0 \\ m^2-4m-12=0 \end{cases}.$

11.14. $y = 2x + 8.$

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku,

gdzie $|OA| = |x_0|, |OB| = |b|, |AB| = 4\sqrt{5}.$

Jeżeli prosta l ma równanie $y = ax + b$, gdzie $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i przechodzi

przez punkt D , to $b = 3a + 2$ i $x_0 = -3 - \frac{2}{a}.$

W trójkącie AOB : $|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2$, gdzie $A = \left(-3 - \frac{2}{a}, 0\right)$

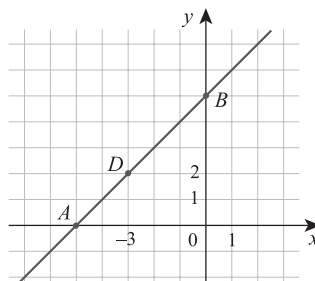
i $B = (0, 3a + 2), 80 = \left(-3 - \frac{2}{a}\right)^2 + (3a + 2)^2$, więc równanie $9a^4 + 12a^3 - 67a^2 + 12a + 4 = 0$

jest równoważne równaniu $(a - 2)(9a^3 + 30a^2 - 7a - 2) = 0.$

11.15. $m \in \langle -3; 1 \rangle.$

Wskazówka: Współrzędne wspólnego punktu prostej l i odcinka AB spełniają

$$\text{układ warunków: } \left\{ \begin{array}{ll} 2x - 3y + m = 0 & (\text{równanie prostej } l) \\ y = 2x - 1 & (\text{równanie prostej } AB) \\ -1 \leq y \leq 1 & \\ 0 \leq x \leq 1 & \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\text{warunki, jakie spełniają współrzędne} \\ \text{punktów odcinka } AB) \end{array}$$



11.16. Punkt przecięcia prostych l i k należy do wnętrza prostokąta $ABCD$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$m \in \left(-1\frac{1}{2}; 0\right).$$

Wskazówka: Napisz równanie prostej l przechodzącej przez punkty $P = (x_P, y_P)$ i $S = (x_S, y_S)$,

korzystając z jednego ze wzorów: $(y - y_S)(x_S - x_P) = (y_S - y_P)(x - x_S)$ lub $y - y_S = \frac{y_S - y_P}{x_S - x_P}(x - x_S)$,

gdy $x_S \neq x_P$. Równanie prostej l ma postać $4x + y - 5 = 0$. Proste l i k przecinają się w punkcie K o współ-

rzędnych $\begin{cases} x = \frac{2-m}{2} \\ y = 2m+1 \end{cases}$ dla $m \in \mathbf{R}$, czyli $K = \left(\frac{2-m}{2}, 2m+1\right)$. Punkt K należy do wnętrza prostokąta $ABCD$,

gdy jego współrzędne spełniają układ nierówności $\begin{cases} 1 < x < 3 \\ -2 < y < 1 \end{cases}$, czyli $\begin{cases} 1 < \frac{2-m}{2} < 3 \\ -2 < 2m+1 < 1 \end{cases}$.

11.17. Punkt przecięcia się prostych należy do prostokąta $ABCD$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$m \in \langle -3; -2 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle.$$

Wskazówka: Proste przecinają się w punkcie o współrzędnych $x = m^2 + m - 2$

i $y = -m - 2$, gdy $m \in \mathbf{R}$. Punkt o współrzędnych (x, y) należy do prostokąta $ABCD$, gdy jego współrzędne

spełniają układ nierówności $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ -4 \leq y \leq 1 \end{cases}$, czyli $\begin{cases} 0 \leq m^2 + m - 2 \leq 10 \\ -4 \leq -m - 2 \leq 1 \end{cases}$, więc $\begin{cases} m \in \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle \\ m \in \langle -3; 2 \rangle \end{cases}$.

11.18. a) Na osi x , gdy $m = \frac{3}{4}$, na osi y , gdy $m = -\frac{8}{3}$, **b)** $m \in \left(-\frac{8}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{3}{4}\right)$.

Wskazówka: a) Proste przecinają się w punkcie o współrzędnych $x = \frac{3m+8}{m^2+2}$ i $y = \frac{4m-3}{m^2+2}$,

gdy $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Punkt $(0, y)$ leży na osi y , więc $\frac{3m+8}{m^2+2} = 0$. Punkt $(x, 0)$ leży na osi x , więc $\frac{4m-3}{m^2+2} = 0$.

b) Punkt (x, y) należy do czwartej ćwiartki układu współrzędnych, gdy $x > 0$ i $y < 0$.

11.19. a) $m = \frac{3}{5}$, **b)** $m \in \left\langle -\frac{22}{25}; 0 \right\rangle$.

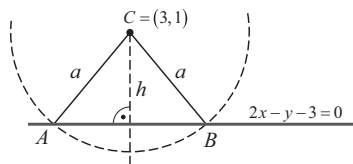
Wskazówka: a) Punkt P ma współrzędne $x = 3m+1$ i $y = 4m+2$, gdy $m \in \mathbf{R}$,

b) Punkt P należy do koła, gdy współrzędne tego punktu spełniają nierówność $x^2 + y^2 \leq 5$, czyli

$$(3m+1)^2 + (4m+2)^2 \leq 5.$$

$$11.20. A = \left(\frac{33 - 2\sqrt{3}}{15}, \frac{21 - 4\sqrt{3}}{15} \right), B = \left(\frac{33 + 2\sqrt{3}}{15}, \frac{21 + 4\sqrt{3}}{15} \right).$$

Wskazówka: Długość h wysokości trójkąta ABC jest odległością punktu C od prostej $2x - y - 3 = 0$, czyli $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$.



Z warunków $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$ oblicz $a = \frac{4\sqrt{15}}{15}$.

Wierzchołki A i B należą do okręgu o środku C i promieniu $r = a$, czyli spełniają układ

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 = \frac{16}{15} \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

11.21. **Wskazówka:** Zauważ, że $|AB| = \sqrt{26}$, $|AC| = \sqrt{(2m-3)^2 + (-m)^2}$, $|BC| = \sqrt{(2m+2)^2 + (-m-1)^2}$.

$|AB| = |AC|$, więc $5m^2 - 12m - 17 = 0$, skąd $m_1 = -1$, $m_2 = 3, 4$.

$|AB| = |BC|$, więc $5m^2 + 10m - 21 = 0$, skąd $m_3 \neq m_1$ i $m_3 \neq m_2$, $m_4 = m_1$ i $m_4 \neq m_2$ c.n.u.

11.22. $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right)$.

Wskazówka: Punkt M leży na prostej $x - y + 3 = 0$, więc $M = (x, x + 3)$. $d(x) = |AM|^2 + |BM|^2$, czyli $d(x) = 4x^2 - 4x + 18$.

11.23. $P = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

Wskazówka: Długość wysokości trapezu jest równa odległości między prostymi równoległymi.

11.24. $C = (5, 6)$ lub $C = (-3, -2)$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

Skorzystaj z wzorów:

- na odległość punktu od prostej i oblicz $|AD| = 3\sqrt{2}$,
- na pole trójkąta i oblicz $|BC| = 8\sqrt{2}$.

11.25. $C = (1, 6)$ lub $C = (-3, -6)$.

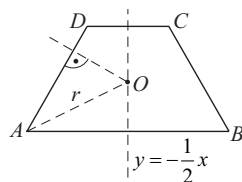
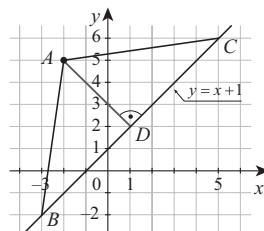
Wskazówka: $A = (-2, 0)$, $B = (6, 0)$ i skorzystaj z wzoru z zadania 4.10..

11.26. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{325}{16}$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, gdzie $|AO| = |DO| = r$.

Środek okręgu opisanego jest punktem przecięcia się symetralnych boków

AD i AB o równaniach $y = -\frac{4}{3}x - 5$ i $y = -\frac{1}{2}x$.



11.27. $B = (5, 3)$, $D = (-3, 5)$.

Wskazówka: Punkt S przecięcia się przekątnych rombu ma współrzędne $(1, 4)$.

Zauważ, że $|SC| = \sqrt{17}$, $|CB| = \sqrt{34}$, $|\sphericalangle CSB| = 90^\circ$.

11.28. $B = (5, 1)$, $D = (1, 5)$, $\cos(\sphericalangle BAD) = -\frac{3}{5}$.

Wskazówka: Z warunku $\sin(\sphericalangle CBD) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ oblicz długość boku BC

rombu ($|BC| = 10$), a następnie współrzędne wierzchołków B i D ,

które leżą na symetralnej odcinka AC .

Zauważ, że $\cos(\sphericalangle BAD) = \cos[2 \cdot (\sphericalangle BAC)] = 2\cos^2(\sphericalangle BAC) - 1$,

gdzie $\cos(\sphericalangle BAC) = \sin(\sphericalangle CBD) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

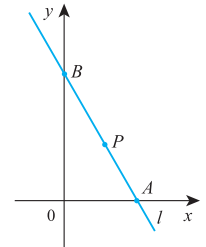
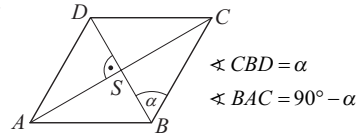
11.29. $3x + y - 12 = 0$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, gdzie

$$A = (x_A, 0) \text{ i } B = (0, y_B). \quad l: y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \Leftrightarrow l: y = -\frac{y_B}{x_A}(x - x_A).$$

$$\text{Współrzędne } x_A \text{ i } y_B \text{ są rozwiązaniem układu równań } \begin{cases} 6 = -\frac{y_B}{x_A}(2 - x_A) \\ \frac{x_A \cdot y_B}{2} = 24 \quad (P_{\Delta OAB} = 24) \end{cases}.$$

Stąd $x_A = 4$ i $y_B = 12$.



Okrąg i prosta

11.30. a) Tak, b) nie.

11.31. $3x - 5y - 1 = 0$.

Wskazówka: Prosta spełniająca warunki zadania jest symetralną odcinka O_1O_2 , gdzie punkty O_1 i O_2 są środkami podanych okręgów.

11.32 $P = 32$.

Wskazówka: Promień okręgu $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$ jest połową przekątnej kwadratu.

11.33. $m = -2\sqrt{2}$ lub $m = 2\sqrt{2}$.

Wskazówka: Prosta jest styczna do okręgu, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest równa promieniowi okręgu.

11.34. Prosta jest sieczną, ponieważ odległość środka okręgu od prostej l jest mniejsza od promienia r okręgu.

11.35. Prosta jest sieczną.

11.36. a) $m = -2 - 2\sqrt{2}$ lub $m = -2 + 2\sqrt{2}$,

b) $m \in (-\infty; -2 - 2\sqrt{2}) \cup (-2 + 2\sqrt{2}; +\infty)$,

c) $m \in (-2 - 2\sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2})$.

11.37. $(2, 0)$ i $(-1, -3)$.

11.38. $\left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

Wskazówka: Okrąg o środku S ma równanie $(x-3)^2 + (y-7)^2 = \frac{16}{5}$.

11.39. a) $y = 0$ i $y = -\frac{20}{21}x$,

b) $y = \sqrt{3}x + 4$ i $y = -\sqrt{3}x + 4$,

c) $y = 2x - 3 + 2\sqrt{5}$ i $y = 2x - 3 - 2\sqrt{5}$,

d) $y = 3x - 14$ i $y = 3x + 6$,

e) $y = \sqrt{3}x + 4$ i $y = \sqrt{3}x - 4$,

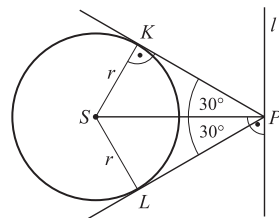
f) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$ i $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$.

11.40. $m \in \{1 - 5\sqrt{2}, 1 + 5\sqrt{2}\}$.

Wskazówka: $S = (2, 3)$, $r = 2, 5$.

Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku, i zauważ, że $|SP| = 2r = 5$.

Zatem odległość środka S od prostej l jest równa 5, czyli $\frac{|2 - 3 + m|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 5$.



11.41. **Wskazówka:** Odległość środka S okręgu od stycznej l przechodzącej

przez punkt A , czyli $ax - y - 2a = 0$ jest równa promieniowi tego okręgu, czyli $\frac{|a \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) - 2a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$,

skąd $a_1 = -2$ i $a_2 = \frac{1}{2}$, gdzie a_1 i a_2 są współczynnikami kierunkowymi stycznych.

11.42. $(1, 1)$.

11.43. $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, $P = 10(1 + \sqrt{5})$.

11.44. $P = 4$.

Wskazówka: Wierzchołkami czworokąta $ABCD$ są punkty

$A = (1, -1)$, $B = (2, -2)$, $C = \left(\frac{17}{5}, -\frac{9}{5}\right)$, $D = (3, 1)$.

11.45. a) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$,

b) są cztery takie okręgi: $(x-3)^2 + (y+3-3\sqrt{2})^2 = 9$, $(x-3)^2 + (y+3+3\sqrt{2})^2 = 9$,

$(x+3)^2 + (y-3-3\sqrt{2})^2 = 9$, $(x+3)^2 + (y-3+3\sqrt{2})^2 = 9$,

c) $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{8}$ lub $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \left(y+\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{8}$.

Wskazówka: a) Skorzystaj z warunku $|AS|=|BS|$, gdzie $S=(a,b)$ i $a-b+2=0$ (punkt S leży na prostej o równaniu $x-y+2=0$), c) zauważ, że proste są równoległe, a środek S okręgu leży na prostej o równaniu $x+y+\frac{1}{2}=0$. Zatem $|SP|=r$, gdzie $r=\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

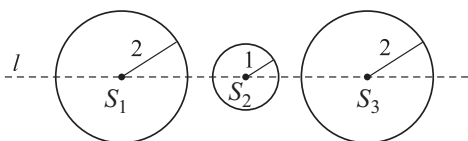
11.46. a) I: $r_3=2$, II: $r_3=1$,

b) I: $(x+3)^2 + (y-8)^2 = 4$, II: $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 1$,

c) I: $2x+3y-18=0$ i $3x-2y+12=0$, II: $2x+3y-18=0$ i $3x-2y-1=0$.

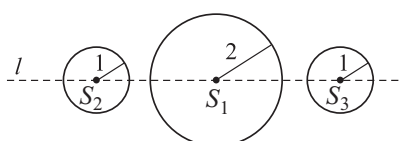
Wskazówka:

Przypadek I



$|S_1S_2|=|S_2S_3|$, gdzie S_2 – środek symetrii figury f , która jest sumą okręgów $o_1(S_1, 2)$, $o_2(S_2, 1)$ i $o_3(S_3, 2)$. Środki okręgów: o_1 , o_2 i o_3 są współliniowe oraz $r_3=r_1=2$.

Przypadek II



$|S_2S_1|=|S_1S_3|$, S_1 – środek symetrii figury f , która jest sumą okręgów $o_2(S_2, 1)$, $o_1(S_1, 2)$ i $o_3(S_3, 1)$. Środki okręgów o_1 , o_2 i o_3 są współliniowe oraz $r_2=r_3=1$.

11.47. a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$,

b) $(x+1)^2 + (y-9)^2 = 9$.

Wskazówka: Symetria środkowa i przesunięcie o wektor to przekształcenia nie zmieniające odległości, więc promień obrazu okręgu jest równy promieniowi okręgu, który przekształcamy.

a) Obrazem środka $S=(-2, 3)$ jest punkt $S'=(2, -3)$. b) Obrazem środka $S=(-2, 3)$ w przesunięciu o wektor $\vec{u}=[1, 6]$ jest punkt $S'=(-1, 9)$.

11.48. a) Tak,

b) tak,

c) nie.

Wskazówka: Sprawdź, czy sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe.

11.49. a) $2x+y-6=0$,

b) $S=(3, 0)$, $P=10$.

Wskazówka: $A=(-2, 0)$, $B=(6, 4)$.

$$11.50. \text{ a) } P=10, L=5\sqrt{10}+4\sqrt{17}+\sqrt{2}, \quad \text{ b) } (x+5)^2+(y+2)^2=85.$$

Wskazówka: $A=(-3, 7)$, $B=(2, -8)$, $W=(1, -9)$.

$$11.51. \text{ k}=2. \text{ a) } A=(-1, 2), C=(7, -6), B=(-1, -6), D=(7, 2),$$

$$\text{ b) } P_f = P_O - P_{\square}, P_f = 32(\pi - 2).$$

Wskazówka: Podstawiając do równania okręgu współrzędne punktu $A=(-1, k)$, otrzymujemy równanie $k^2 + 4k - 12 = 0$, którego dodatnim rozwiązaniem jest liczba $k=2$.

$$11.52. \text{ r}=\sqrt{10}, (x-4)^2+(y-4)^2=10.$$

$$11.53. \text{ Wskazówka: } S=(2, 4) \text{ i } y=ax \text{ oraz } r=\sqrt{10}, \text{ więc } \frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}. \text{ skąd } a_1=-3 \text{ i } a_2=\frac{1}{3}.$$

11.54. Punkt P należy do okręgu, gdy $k=-2$ lub $k=3$.

Wskazówka: Proste przecinają się w punkcie P o współrzędnych $x=\frac{k+2}{5}$ i $y=\frac{k-3}{5}$, gdy $k \in \mathbf{R}$.

Punkt P należy do okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu 1, gdy współrzędne tego punktu spełniają równanie okręgu postaci $x^2+y^2=1$, czyli $\left(\frac{k+2}{5}\right)^2+\left(\frac{k-3}{5}\right)^2=1$.

Wektory

$$11.55. \text{ a) } \overrightarrow{CF}, \quad \text{ b) } \overrightarrow{DE}, \quad \text{ c) } \overrightarrow{CE}, \quad \text{ d) } \vec{0}.$$

$$11.56. \text{ a) } \overrightarrow{AE}, \quad \text{ b) } \overrightarrow{GF}, \quad \text{ c) } \overrightarrow{FC}.$$

$$11.57. \text{ Wskazówka: } Z \text{ układu } \begin{cases} \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM} = \vec{0} \\ \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\text{otrzymujemy równanie } 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NB}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AM}) = \vec{0}.$$

Ponieważ $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NB} = \vec{0}$ i $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AM} = \vec{0}$, więc $2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$,

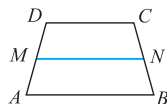
$$\text{zatem } 2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}, \text{ czyli } \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}.$$

$$11.58. \text{ Wskazówka: } \text{Zauważ, że } \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} \text{ i } \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{FC}.$$

$$11.59. \text{ Wskazówka: } \vec{a} = \frac{3}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \text{ i } \vec{b} = 3(\vec{u} + \vec{v}).$$

$$11.60. \text{ Wskazówka: } \text{Zauważ, że: } 1^\circ \overrightarrow{DC} = \frac{b}{a} \cdot \overrightarrow{BD} \text{ i } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}, \text{ skąd } \overrightarrow{BD} = \frac{a}{a+b} \cdot \overrightarrow{BC},$$

$$2^\circ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}, \text{ skąd } \overrightarrow{AD} = \frac{a \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + b \cdot \overrightarrow{AB}}{a+b}.$$



11.61. $F = 100 \text{ N}$.

Wskazówka: $F = \sqrt{|F_1|^2 + |F_2|^2}$.

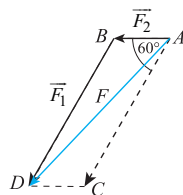
11.62. 59 N.

Wskazówka: Na wektorach $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ budujemy równoległobok $ABCD$.

W trójkącie ABD : $|\angle ABD| = 120^\circ$, $|AB| = F_2$, $|BD| = F_1$, $|AD| = F$. Stosując

twierdzenie cosinusów, mamy $F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos 120^\circ$, skąd

$$F = \sqrt{3475}.$$



11.63. a) $\vec{u} = [-4, -8]$, $|\vec{u}| = 4\sqrt{5}$, $\vec{v} = [2, -\frac{3}{2}]$, $|\vec{v}| = \frac{5}{2}$, $\vec{k} = [4, -3]$, $|\vec{k}| = 5$,

b) $\vec{u} = [6, 1]$, $|\vec{u}| = \sqrt{37}$, $\vec{v} = [2, -7]$, $|\vec{v}| = \sqrt{53}$, $\vec{k} = [8, -17]$, $|\vec{k}| = \sqrt{353}$.

Wskazówka: $A = (-3, -1)$, $B = (-1, 3)$, $C = (1, 2)$, $D = (5, -1)$;

a) $\vec{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A] = [-1 + 3, 3 + 1] = [2, 4]$, więc $\vec{u} = -2 \cdot \vec{AB} = -2 \cdot [2, 4] = [-2 \cdot 2, -2 \cdot 4] = [-4, -8]$,
 $|\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2}$;

b) $\vec{AB} = [2, 4]$, $\vec{CD} = [5 - 1, -1 - 2] = [4, -3]$, więc $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{CD} = [2, 4] + [4, -3] = [2 + 4, 4 - 3] = [6, 1]$.

11.64. a) $a_1 = 1 - \sqrt{7}$, $a_2 = 1 + \sqrt{7}$,

b) $a_0 = 1$,

c) $a_1 = -3$, $a_2 = 5$.

11.65. a) $m_1 = -1$,

b) $m_1 = 4$, $m_2 = -4$.

Wskazówka: Warunki zadania są spełnione, gdy: a) $\frac{-2}{1} = \frac{m}{2m + \frac{5}{2}}$,

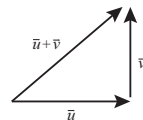
b) $\frac{m}{8} = \frac{2}{m}$.

11.66. a) Nie,

b) tak.

Wskazówka: $\vec{u} \perp \vec{v}$, gdy spełniony jest warunek $|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2$

(twierdzenie Pitagorasa).



11.67. $P = (4, -2)$.

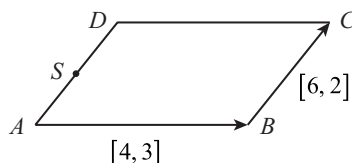
11.68. a) $B = (4, 17)$, $C = (12, 10)$,

b) $P_{\Delta ABC} = 62$.

11.69. $A = (-3, -1)$, $B = (1, 2)$, $C = (7, 4)$, $D = (3, 1)$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.

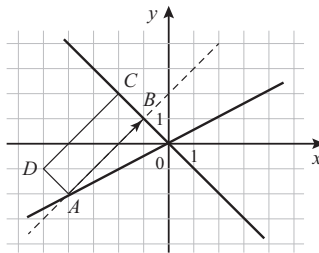
$\vec{AS} = \frac{1}{2} \vec{BC} = [3, 1]$, skąd $A = (-3, -1)$.



11.70. $2x - y + 6 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$.

Wskazówka: Współczynnik kierunkowy a prostej AB

jest równy 1, bo $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ i $y_B - y_A = 3$ oraz $x_B - x_A = 3$.



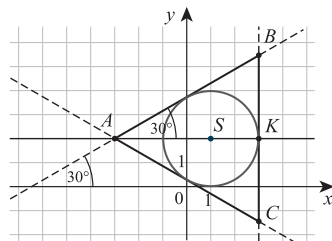
11.71. a) $D = (3, 2)$,

b) $C = (4, 12)$.

11.72. $(3, 2)$, $(0, \sqrt{3} + 2)$, $(0, 2 - \sqrt{3})$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia,

jak na rysunku, gdzie prosta AS jest równoległa do osi x , a prosta BC jest prostopadła do osi x . Trójkąt ABC jest równoboczny, więc



$\overline{AS} = 2\overline{SK}$, skąd $K = (3, 2)$. Prosta BC ma równanie $x = 3$. Ponieważ

prosta AB tworzy z osią x kąt o mierze 30° i przechodzi przez punkt A , więc jej równanie ma postać

$$y - y_A = \operatorname{tg} 30^\circ (x - x_A), \text{ czyli } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} + 2.$$

Rozwiązaniem układu równań
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} + 2 \end{cases}$$
 są współrzędne punktu $B = (3, 2\sqrt{3} + 2)$.

Z warunku, że $\overline{BK} = \overline{KC}$ oblicz współrzędne punktu $C = (3, 2 - 2\sqrt{3})$.

Punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny są środki boków trójkąta.

11.73. a) $B = (-1, 2)$, $C = (0, -5)$, $D = (7, -4)$,

b) $A' = (-6, -3)$, $B' = (1, -2)$, $C' = (0, 5)$, $D' = (-7, 4)$.

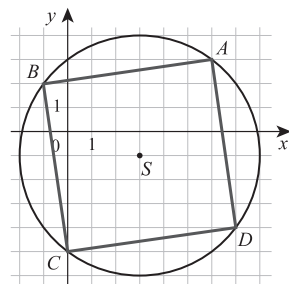
Wskazówka: Środek okręgu $S = (3, -1)$ jest środkiem odcinka AC .

Z warunku $\overline{AS} = \overline{SC}$ oblicza współrzędne punktu $C = (0, -5)$,

a z warunku, że $AS \perp BD$, mamy $BD: y = \frac{1}{4}(5 - 3x)$.

Rozwiązując układ równań
$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}(5 - 3x) \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0 \end{cases}, \text{ wyznacz}$$

współrzędne wierzchołków B i D .



11.74. a) $C = (6, 6)$,

b) $P = \frac{27}{2}$,

c) nie, bo suma długości podstaw jest różna od sumy długości ramion trapezu,

d) $y = -x + 9$.

11.75. $B = (4, 2)$, $D = (0, 4)$.

11.76. $\alpha \approx 37^\circ$.

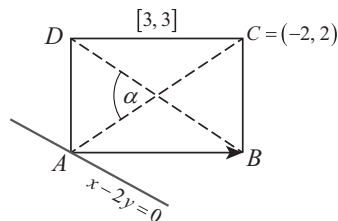
Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku,

i z warunku $\overline{AB} = \overline{DC}$ oblicz $D = (-5, -1)$.

Równanie prostej DC : $y = x + 4$, równanie prostej AD : $y = -x - 6$.

Rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = -x - 6 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ obliczysz współrzędne

punktu $A = (-4, -2)$. $P = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}|$ i $P = \frac{1}{2} |\overline{AC}|^2 \cdot \sin \alpha$, gdzie $|\overline{AB}| = 3\sqrt{2}$.



11.77. $A = (4 + \sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $B = (4 - \sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Wskazówka: Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku. Prosta CS : $y = x - 4$, prosta

AB : $y = -x + 4$, $R = |\overline{CS}| = 2\sqrt{2}$, bo $\overline{CS} = [2, 2]$ i $\overline{CS} = \frac{2}{3} \overline{CD}$, więc $D = (4, 0)$.

Współrzędne punktów A i B oblicz, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 = 8 \\ y = -x + 4 \end{cases}.$$

