

5. Funkcja liniowa i funkcja kwadratowa – odpowiedzi i wskazówki

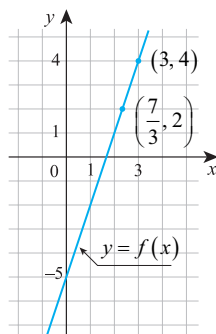
Funkcja liniowa

5.1. a) $f(x) = \frac{2}{3}x - 6$, b) $f(x) = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 5$, c) $f(x) = -4x + 11$, d) $f(x) = 3x - 5$.

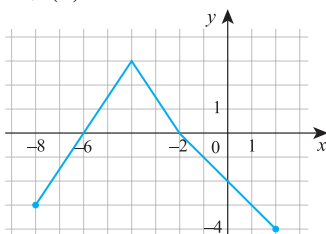
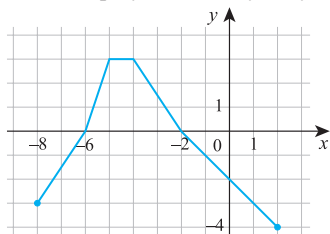
Wskazówka: d) $f(x) < 2$, gdy $x \in \left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$, więc punkt o współrzędnych $\left(\frac{7}{3}, 2\right)$

należy do wykresu funkcji f . $f(x) \geq 4$, gdy $x \in \langle 3; +\infty \rangle$, więc wykres funkcji

przechodzi przez punkt $(3, 4)$. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} 4 = 3a + b \\ 2 = \frac{7}{3}a + b \end{cases}$$



5.2. Dwa przykładowe wykresy funkcji $y = f(x)$.



5.3. $f(x) = 2x + 5$ lub $f(x) = -2x + 7$.

Wskazówka: Z warunków zadania funkcja f jest rosnąca albo malejąca, stąd wartość najmniejszą lub wartość największą przyjmie na końcach przedziału. Zatem są takie dwie funkcje. Do wykresu jednej należą punkty o współrzędnych $(-4, -3)$ i $(5, 15)$, a do wykresu drugiej należą punkty o współrzędnych $(-4, 15)$ i $(5, -3)$.

5.4. a) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$,

b) $x_0 = -1$.

Wskazówka: $f(x) = 2x + 4$, a) $|f(2x)| = |2 \cdot 2x + 4|$, b) $f[f(x)] = 2(2x + 4) + 4$.

5.5. $a \cdot b = -6$.

Wskazówka: Miejsce zerowe funkcji $f(x) = 3x + b$ to $x_0 = -\frac{b}{3}$, miejsce zerowe funkcji $g(x) = ax - 2$ to $x_0 = \frac{2}{a}$, gdzie $a \neq 0$. Zatem $-\frac{b}{3} = \frac{2}{a}$, skąd $ab = -6$.

5.6. a) $b = 3$,

b) $g(x) = 2x - 6$,

c) $P = 20\frac{1}{4}$.

Wskazówka: a) $f(x-1) = 2(x-1) + b$ i $f(x-1) = 2x + 1$, więc $2(x-1) + b = 2x + 1$,

c) wierzchołkami trapezu są punkty o współrzędnych: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$, $(0, -6)$.

$$5.7. \text{ a) } f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, \quad \text{ b) } f(x) = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}.$$

Wskazówka: a) I sposób

Jeżeli $f(x) = ax + b$, to $f(2x-1) = a(2x-1) + 1$ i $f(2x-1) = 3x-1$.

Zatem $a(2x-1) + b = 3x-1$, skąd $2a = 3$ i $-a + b = -1$.

II sposób

Do wzoru $f(2x-1) = 3x-1$ wstaw za x dwie dowolne liczby, na przykład $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$, otrzymasz układ równań

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{2} \\ f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases}.$$

Zatem wykres funkcji f przechodzi przez punkty $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ i $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

$$5.8. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}.$$

Wskazówka: Do wzoru $f(x+1) = f(x-1) + 1$ wstaw $x = 0$ i otrzymasz $f(1) = f(-1) + 1$,

skąd $f(-1) = 1$. Zatem wykres funkcji f przechodzi przez punkty $(1, 2)$ i $(-1, 1)$.

$$5.9. m = -2, P = (-3, -3).$$

Wskazówka: Współrzędne punktu P wyznacz, rozwiązując układ równań określających proste

$$y = -3x + 3m - 6 \text{ oraz } y = x \text{ i otrzymasz } P = \left(\frac{3m-6}{4}, \frac{3m-6}{4}\right).$$

Współrzędne tego punktu spełniają równanie prostej $y = -\frac{1}{3}x + 2m$, czyli $\frac{3m-6}{4} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3m-6}{4} + 2m$.

$$5.10. \text{ a) } m \in (-1; 3), \quad \text{ b) } m \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty), \quad \text{ c) } m = 2,$$

$$\text{ d) } m = -1 \text{ lub } m = 3, \quad \text{ e) } m = 1.$$

Wskazówka: Funkcja liniowa f jest: a) rosnąca, gdy $2 - |m-1| > 0 \Leftrightarrow |m-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < m-1 < 2$,

b) malejąca, gdy $4 - |2-m| < 0$,

c) stała, gdy $m^3 - 8 = 0$, czyli $m = 2$,

d) stała, gdy $2 - |m-1| = 0$, czyli $|m-1| = 2$,

e) malejąca i jej wykres ma środek symetrii (w punkcie $(0, 0)$), gdy spełniony jest układ

$$\text{warunków } \begin{cases} a < 0 \\ b = 0 \end{cases}, \text{ czyli gdy } \begin{cases} -|m+1| < 0 \\ m^2 - 1 = 0 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} m \neq -1 \\ m = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} m \neq -1 \\ m = -1 \end{cases}, \text{ więc } m = 1.$$

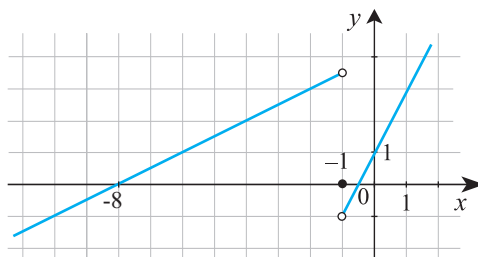
5.11. a) $m = 4$, b) nie istnieje takie m .

Wskazówka: Wykresy funkcji liniowych są prostymi:

a) równoległymi, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe, czyli gdy $\frac{1}{2}m - 3 = m - 5$,

b) prostopadłymi, gdy ich współczynniki kierunkowe spełniają warunek $\left(\frac{1}{2}m - 3\right)(m - 5) = -1$.

5.12. a) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, b) $x \in (-4; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.



5.13. a) Tak, b) nie.

Wskazówka: Funkcje f i g są równe, gdy mają one równe dziedziny i można je określić takim samym wzorem.

5.14. Równanie ma:

- zero rozwiązań, gdy $m \in (-\infty; 5)$,
- dwa rozwiązania, gdy $m \in (5; +\infty)$,
- nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $m = 5$.

Wskazówka: Z definicji wartości bezwzględnej wynika:

$$|x - 4| = \begin{cases} x - 4, & \text{gdy } x \geq 4 \\ -x + 4, & \text{gdy } x < 4 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad |x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{gdy } x \geq -1 \\ -x - 1, & \text{gdy } x < -1 \end{cases}.$$

Liczby -1 i 4 dzielą zbiór $\mathbf{R}$ na przedziały: $(-\infty; -1)$, $\langle -1; 4 \rangle$, $\langle 4; +\infty \rangle$.

Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |x - 4| + |x + 1|$.

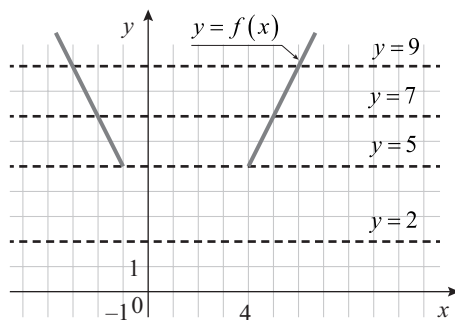
$$f(x) = \begin{cases} -x + 4 + (-x - 1), & \text{gdy } x \in (-\infty; -1) \\ -x + 4 + x + 1, & \text{gdy } x \in \langle -1; 4 \rangle \\ x - 4 + x + 1, & \text{gdy } x \in \langle 4; +\infty \rangle \end{cases}, \text{ czyli}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{gdy } x \in (-\infty; -1) \\ 5, & \text{gdy } x \in \langle -1; 4 \rangle \\ 2x - 3, & \text{gdy } x \in \langle 4; +\infty \rangle \end{cases}.$$

Prosta o równaniu $y = m$, gdzie $m \in \mathbf{R}$, jest równoległa do osi x . Liczba rozwiązań równania $f(x) = m$ jest równa liczbie punktów przecięcia się wykresu funkcji f i prostej

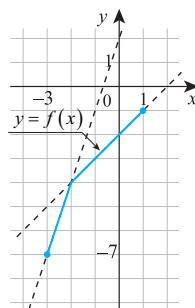
$y = m$. Zatem prosta $y = m$:

- nie ma punktów wspólnych z wykresem funkcji f , gdy $m \in (-\infty; 5)$,
- ma nieskończenie wiele punktów wspólnych z wykresem funkcji f , gdy $m = 5$,
- ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji f , gdy $m \in (5; +\infty)$.



5.15.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x+2, & \text{gd}y \ x \in \langle -3; -2 \rangle \\ x-2, & \text{gd}y \ x \in \langle -2; 1 \rangle \end{cases},$$

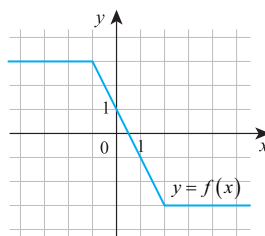


Liczba rozwiązań jest równa: $\begin{cases} 0, & \text{gd}y \ m \in (-\infty; -7) \cup (-1; +\infty) \\ 1, & \text{gd}y \ m \in \langle -7; -1 \rangle \end{cases}.$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 3, & \text{gd}y \ x < -1 \\ -2x+1, & \text{gd}y \ -1 \leq x < 2, \\ -3, & \text{gd}y \ x \geq 2 \end{cases}$$

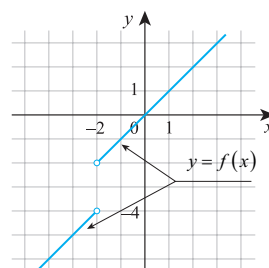
Liczba rozwiązań jest równa:

$$\begin{cases} 0, & \text{gd}y \ m \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty) \\ 1, & \text{gd}y \ m \in (-3; 3) \\ \text{nieskończenie wiele,} & \text{gd}y \ m \in \{-3; 3\} \end{cases}.$$



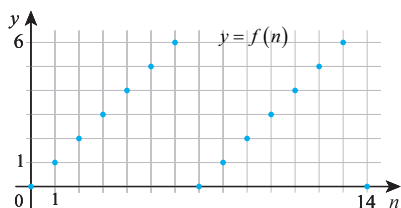
$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x, & \text{gd}y \ x > -2 \\ x-2, & \text{gd}y \ x < -2 \end{cases},$$

Liczba rozwiązań jest równa: $\begin{cases} 0, & \text{gd}y \ m < 0 \\ 2, & \text{gd}y \ m \in (2; +\infty) \cup \{0\} \\ 3, & \text{gd}y \ m = 2 \\ 4, & \text{gd}y \ m \in (0; 2) \end{cases}.$

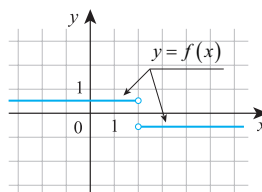


Liczba rozwiązań jest równa: $\begin{cases} 0, & \text{gd}y \ m \in \langle -4; -2 \rangle \\ 1, & \text{gd}y \ m \in (-\infty; -4) \cup (-2; +\infty) \end{cases}.$

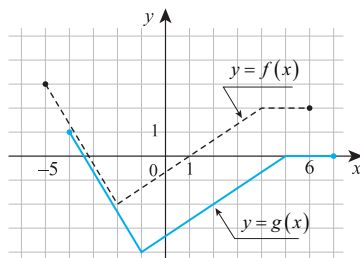
5.16. a) $Y_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$



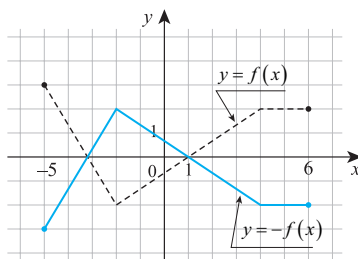
b) $Y_f = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}.$



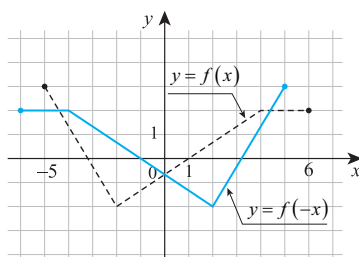
5.17 a) Przesunięcie o wektor $\vec{u} = [1, -2]$.



b) Symetria względem osi x .



c) Symetria względem osi y .

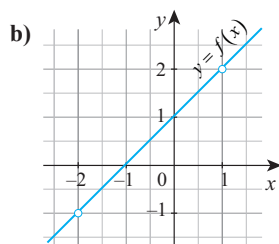


5.18. $g(x) = f(x-1) - 1$.

Wskazówka: Wykres funkcji g otrzymano przesuwając wykres funkcji $f(x) = |x|$ o wektor $\vec{u} = [1, -1]$.

Pisząc wzór funkcji g skorzystaj z wzoru $g(x) = f(x-p) + q$, gdzie $\vec{u} = [p, q]$.

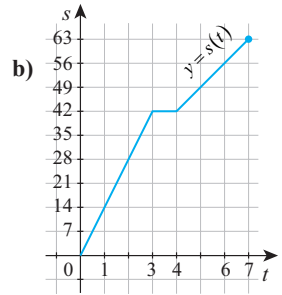
5.19. a) $f(x) = x + 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$,



5.20. a) $s(t) = \begin{cases} 14 \cdot t, & \text{gdy } t \in \langle 0; 3 \rangle \\ 42, & \text{gdy } t \in \langle 3; 4 \rangle, \text{ gdzie: } t - \text{czas [h]}, \\ 42 + 7(t - 4), & \text{gdy } t \in \langle 4; 7 \rangle \end{cases} \quad s(t) - \text{droga [km]},$

c) Rowerzysta przejechał 70 km, d) $9\frac{1}{3} \frac{\text{km}}{\text{h}}$, e) $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wskazówka: d) $v_{\text{sr}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$.



5.21 $x_0 = -2\frac{1}{2}$.

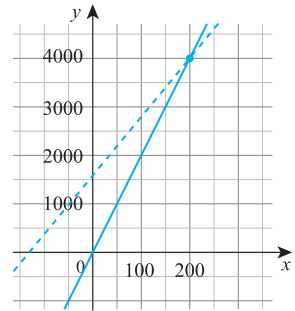
Wskazówka: Równanie prostej $y = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ przechodzącej przez punkty $(-2, 0)$ i $(3, 2)$ po przesunięciu

o wektor $\vec{w} = [2, 1]$ ma postać $y - 1 = \frac{2}{5}(x - 2) + \frac{4}{5}$, skąd $y = \frac{2}{5}x + 1$.

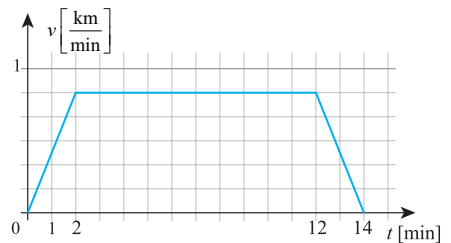
5.22. a) $\rho(T) = -0,00018T + 1,0018$, b) $\rho(18^\circ) = 0,99856$.

5.23. a) $\rho(s) = -0,085s + 50$, b) $s \approx 588,2$ km.

5.24. $(200, 4000)$ – przedsiębiorstwo osiąga punkt krytyczny, gdy wyprodukuje 200 sztuk towaru, a jego obrót będzie równy 4000 zł



5.25. $v(t) = \begin{cases} \frac{5}{12}t, & \text{gdy } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{5}{6}, & \text{gdy } 2 < t \leq 12, \\ \frac{5}{6} - \frac{5}{12}(t - 12), & \text{gdy } 12 < t \leq 14 \end{cases}$



Wskazówka: Zauważ, że pociąg ma stałą prędkość v równą $50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{5}{6} \frac{\text{km}}{\text{min}}$, gdy $2 \leq t \leq 12$.

Pozostałe wzory otrzymasz, pisząc równania prostych przechodzących przez punkty $(0, 0)$ i $(2, \frac{5}{6})$ oraz $(12, \frac{5}{6})$ i $(14, 0)$.

- 5.26. a) $K(x) = 20\,000 + 90x$, b) co najmniej 334 sztuki, c) co najmniej 359 sztuk.

Wskazówka: b) $150x > 20\,000 + 90x \Leftrightarrow x > 333,(\overline{3})$, c) $60x \geq 21\,500 \Leftrightarrow x \geq 358,(\overline{3})$.

Funkcja kwadratowa

- 5.27. a) $Y_f = \left\langle -\infty; \frac{5}{4} \right\rangle$, b) $Y_f = \left\langle 1; \frac{5}{4} \right\rangle$, c) $Y_f = \langle -1; 1 \rangle$.

Wskazówka: $W = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4} \right)$, $f(1) = 1$, $f(0) = -1$, $f(2) = 1$.

5.28. 1.

Wskazówka: Zauważ, że funkcję f można zapisać w postaci $a(x+1)(x-2)$.

Zatem $f(0) = a(0+1)(0-2)$ i $f(1) = a(1+1)(1-2)$.

- 5.29. a) $b = -16$, $c = 24$, b) $x_1^2 + x_2^2 = 40$.

Wskazówka: a) Oś symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = -\frac{b}{2a}$, gdy $x = 4$ i $a = 2$.

Z wzoru Viete'a oblicz c ,

b) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

- 5.30. a) $f(x) = x^2 - 5x + 5$, $x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, b) $f(x) = x^2 - 7$, $x_1 = -\sqrt{7}$, $x_2 = \sqrt{7}$,

c) $f(x) = (x-3)^2$, $x_0 = 3$,

d) $f(x) = x^2 - 4x + 7$, nie ma miejsc zerowych,

e) $f(x) = x^2 - 6x + 1$, $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

5.31. $x \in \left\langle -\frac{1}{3}; 1 \right\rangle$.

Wskazówka: Jeśli $x_1 = 1$, to $x_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

5.32. $a = 3$ i $b = 2$.

Wskazówka: Zauważ, że $x_w = -1$, gdzie $x_w = -\frac{b}{2}$ oraz $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

czyli $x_0^2 + 2x_0 - a = x_0^2 - ax_0 + 2$, więc $x_0(2+a) = 2+a$, skąd $x_0 = 1$, gdy $a \neq -2$ (jeśli $a = -2$, to funkcje f i

g będą identyczne). Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji f i g , więc z równości $f(1) = 0$

albo $g(1) = 0$, czyli $f(1) = g(1)$ oblicz współczynnik a .

5.33. $b = -2$ i $c \in (-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$.

Wskazówka: Funkcja f ma jedno miejsce zerowe, więc $b^2 - 4 = 0$, skąd $b = -2$ lub $b = 2$.

Ponieważ funkcja g przyjmuje tylko wartości ujemne, więc $b < 0$, czyli $b = -2$.

Funkcja g nie ma miejsc zerowych, gdy $c^2 + 16b < 0$.

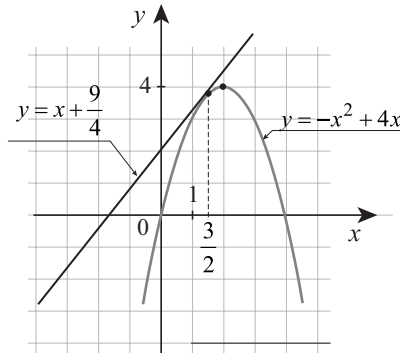
5.34. a) $m = -4$, $n = -\frac{1}{2}$, b) nie.

Wskazówka: Jeżeli miejscami zerowymi funkcji f i g są liczby x_1 i x_2 , to korzystając z wzorów Viete'a

otrzymasz $x_1 + x_2 = -\frac{2}{m}$, gdzie $m \neq 0$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m}$ oraz $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{n}{2}$, skąd $-\frac{2}{m} = \frac{1}{2}$

i $\frac{1}{m} = \frac{n}{2}$.

5.35. $m = 2\frac{1}{4}$.



Wskazówka: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4x = x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x + m = 0$.

Warunki zadania są spełnione, gdy równanie $x^2 - 3x + m = 0$ ma jedno rozwiązanie, czyli gdy $\Delta = 0$, gdzie $\Delta = 9 - 4m$.

5.36. $t \in (-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$.

Wskazówka: Warunki zadania są spełnione, gdy $\Delta > 0$ i $x_1^2 + x_2^2 > x_1 + x_2$,

gdzie $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

5.37. $m = -1$. a) $y = x^2 + 4x + 3$, b) $(-1, 0)$.

Wskazówka: Jeżeli punkt $W = (x_w, y_w)$ jest wierzchołkiem paraboli, to z warunków zadania mamy:

$$\begin{cases} x_w = m - 1, \\ y_w = -m^2 - m - 1, \\ x_w \cdot y_w = 2, \text{ gdy } x_w \neq 0 \end{cases} \quad , \text{ skąd } (m-1)(-m^2 - m - 1) = 2.$$

5.38 $m = -1$.

Wskazówka: Funkcja f ma dwa miejsca zerowe, gdy $m^2 - 4m > 0$ ($\Delta > 0$).

Warunek $(x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1) = 1 \Leftrightarrow x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)^2 = 1$.

Z wzorów Viete'a $x_1 \cdot x_2 = -m$ i $x_1 + x_2 = m$, więc warunki zadania są spełnione, gdy $2m^2 + m - 1 = 0$, skąd $m = -1$ lub $m = \frac{1}{2}$. Uwzględnij warunek $\Delta > 0$, otrzymasz odpowiedź.

5.39. $m = 3$.

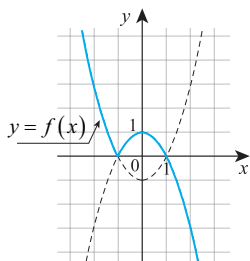
Wskazówka: $-\frac{b}{2a} = \frac{2(m+3)}{2(m-1)} = 3$ i $-\frac{b}{2a} = 3$, więc $\frac{2(m+3)}{2(m-1)} = 3$, gdzie $m \neq 1$.

5.40. **Wskazówka:** $\log_{a^2} c \cdot \log_{c^2} a = \frac{\log_a c}{\log_a a^2} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a c^2} = \frac{1}{4}$.

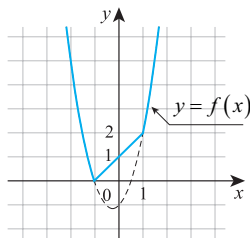
Zauważ, że $x_1 + x_2 = \frac{1}{4} = -\frac{b}{a}$ i $x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$. **c.n.u.**

5.41. **Wskazówka:** Zauważ, że funkcja f ma miejsca zerowe, więc $b^2 - 4c \geq 0$ i wyróżnik Δ_g funkcji g ma wzór $\Delta_g = \left(m - \frac{1}{m}\right)^2 \cdot (b^2 - 4c) \cdot \left(m - \frac{1}{m}\right)^2 \geq 0$ i $b^2 - 4c \geq 0$, więc $\Delta_g \geq 0$.

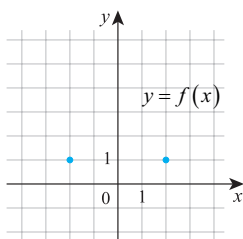
5.42. a)



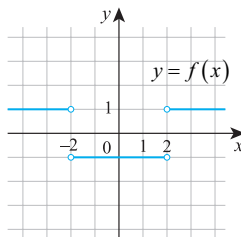
b)



c)



d)



Wskazówka: a) Funkcję f zapisz w postaci $f(x) = (1-x) \cdot |x+1|$, skąd $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{gdy } x < -1 \\ 1 - x^2, & \text{gdy } x \geq -1 \end{cases}$.

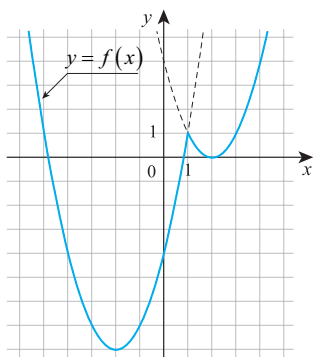
b) Funkcję f zapisz w postaci $f(x) = x^2 + x + |x^2 - 1|$, skąd $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 1, & \text{gdy } x \leq -1 \text{ lub } x \geq 1 \\ x + 1, & \text{gdy } -1 < x < 1 \end{cases}$

c) Określ dziedzinę funkcji f : $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \end{cases}$, skąd $\begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \\ x \in (-2; 2) \end{cases}$, więc $D_f = \{-2; 2\}$,

skąd $f(-2) = 1$ oraz $f(2) = 1$. Zatem $f(x) = 1$, gdy $x \in \{-2; 2\}$.

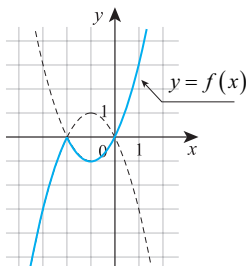
d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$ $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \frac{1}{2}x^2 - 2 > 0 \\ -1, & \text{gdy } \frac{1}{2}x^2 - 2 < 0 \end{cases}$.

5.43 a)

Równanie $f(x) = m$ ma:

- 0 rozwiązań, gdy $m \in (-\infty; -8)$,
- 1 rozwiązanie, gdy $m = -8$,
- 2 rozwiązania, gdy $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$,
- 3 rozwiązania, gdy $m = 0$ lub $m = 1$,
- 4 rozwiązania, gdy $m \in (0; 1)$.

b)

Równanie $f(x) = m$ ma:

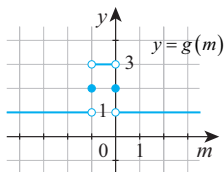
- 1 rozwiązanie, gdy $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$,
- 2 rozwiązania, gdy $m \in \{-1, 0\}$,
- 3 rozwiązania, gdy $m \in (-1; 0)$.

5.44. Przesunięcie o wektor o współrzędnych: a) $[-3, -16]$, b) $[-1, -5]$.**Wskazówka:** Zauważ, że wykresy funkcji f i g są parabolami przystającymi do wykresu funkcjia) $y = x^2$, b) $y = -2x^2$. Wystarczy wzór funkcji g przedstawić w postaci $g(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie p i q są współrzędnymi wierzchołka paraboli określonej równaniem:

a) $y = x^2 + 6x - 7 = (x + 3)^2 - 16$,

b) $y = -2x^2 - 4x - 7 = -2(x + 1)^2 - 5$.

5.45.

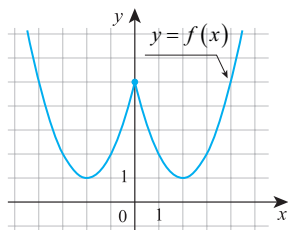
**Wskazówka:** Zauważ, że prosta o równaniu $y = m$ z wykresem funkcji f ma:

- jeden punkt wspólny, gdy $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$,
- dwa punkty wspólne, gdy $m \in \{-1, 0\}$,
- trzy punkty wspólne, gdy $m \in (-1; 0)$.

$$\text{Zatem } g(m) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty) \\ 2, & \text{gdy } m \in \{-1, 0\} \\ 3, & \text{gdy } m \in (-1; 0) \end{cases}$$

5.46. Gdy $x < 0$, to $f(x) = (x+2)^2 + 1$,

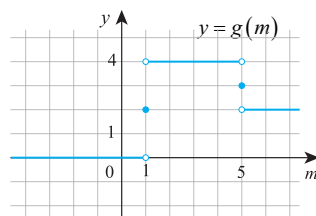
a)



b)

$$g(m) = \begin{cases} 4, & \text{gdy } m \in (1; 5) \\ 3, & \text{gdy } m = 5 \\ 2, & \text{gdy } m \in \{1\} \cup (5; +\infty) \\ 0, & \text{gdy } m \in (-\infty; 1) \end{cases}$$

c)



Wskazówka: Gdy $x < 0$, to $f(-x) = (-x-2)^2 + 1 = [-1 \cdot (x+2)]^2 + 1 = (x+2)^2 + 1$.

5.47. a) $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w dziesiątej sekundzie,

b) 20 s.

Wskazówka: Funkcja V jest funkcją kwadratową. a) $V_{MAX} = V(10)$,

b) $V(t) = 0$.

5.48. a) 35 pokoi,

b) 33 pokoi.

Wskazówka: a) $P(x) = 20 \cdot 120 + x(120 - 4x)$, gdzie x to liczba pokoi wynajętych powyżej 20

i $x \in \langle 0; 20 \rangle$ i $x \in \mathbb{N}$,

b) $P_{MAX}(x) = P(x) - 16(20 + x)$.

5.49. $x_0 = 10$.

Wskazówka: Cena równowagi to cena x_0 dla której wartość popytu równa jest wartości podaży,

czyli gdy $p(x_0) = q(x_0)$, czyli $80 - 3x_0 - \frac{1}{50}x_0^2 = 60 - \frac{1}{50}x_0^2$ i $x_0 \in (0, 50)$.

5.50. $25\frac{1}{2}$, $25\frac{1}{2}$.

Wskazówka: $f(x) = x^2 + (51 - x)^2 = 2x^2 - 102x + 2601$, więc $x_w = -\frac{-102}{2 \cdot 2}$.

5.51. Zysk będzie największy, gdy zakład wyprodukuje około 82 sztuk. $Z(x)$ – zysk, więc $Z(82) \approx 3902$ zł.

Wskazówka: $Z(x) = U(x) - K(x)$, skąd $Z(x) = -0,6x^2 + 98x - 100$.

5.52. W piątej godzinie sprzedano 20 kg owoców.

Wskazówka: $f(n) = 0$, gdy $8n - \frac{4}{5}n^2 = 0$, skąd $n_1 = 0$ lub $n_2 = 10$.

Funkcja $f(n)$ jest funkcją kwadratową, której współczynnik przy n^2 jest równy $-\frac{4}{5}$. Ma ona wartość

największą, gdy $n = \frac{n_1 + n_2}{2} = \frac{0 + 10}{2} = 5$, $f_{MAX} = f(5) = 20$ kg.

5.53. a) $t = 10$ s, b) po 5 s, $h = 100$ m.

Wskazówka: $h(t) = 0$, gdy $t = 0$ lub $t = 10$. Zatem ciało upadło na ziemię po 10 sekundach.

Jego wysokość nad ziemią była największa, gdy $t = \frac{-40}{-8} = 5$ s, $h_{MAX} = h(5) = 100$.

5.54. $P = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

Wskazówka: Równanie prostej KL ma postać $y = -3x - 3$. Punkty M, N wyznacz, rozwiązując

układ równań $\begin{cases} y = -3x - 3 \\ y = -x^2 - 4x - 1 \end{cases}$, skąd $M = (-2, 3)$, $N = (1, -6)$, a następnie napisz równania stycznych przechodzących przez punkty M i N , korzystając z wzorów $y - y_M = a_M(x - x_M)$, $y - y_N = a_N(x - x_N)$,

gdzie $a_M = f'(-2) = 0$, $a_N = f'(1) = -6$. Rozwiązując układ $\begin{cases} y = 3 \\ y = -6x \end{cases}$, otrzymasz odpowiedź.

5.55. $f(x) = k[p(x)] = x + 4$, $D_f(-\infty; 1)$, $g(x) = p[k(x)] = \sqrt{x^2 - 4}$, $D_g = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Wskazówka: $f(x) = k[p(x)] = f(\sqrt{1-x}) = 5 - (\sqrt{1-x})^2 = 5 - 1 + x$,

$D_k = \mathbb{R}$ i $D_p = (-\infty; 1)$, więc $D_f = (-\infty; 1)$.

$g(x) = p[k(x)] = p(5 - x^2) = \sqrt{1 - (5 - x^2)} = \sqrt{x^2 - 4}$ i $x^2 - 4 \geq 0$.