

9. Ciągi liczbowe – odpowiedzi i wskazówki

Własności ciągów liczbowych

9.1. a) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5},$

b) 1, 5, 23, 119.

9.2. a) Nie,

b) tak.

Wskazówka: Wystarczy sprawdzić, czy iloraz $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ jest stały (czy nie zależy od n , gdzie $n \in \mathbb{N}^+$).

9.3. $a_2 = 0, a_3 = 0, a_5 = 0.$

9.4. a) $2, \frac{5}{4}, \frac{41}{40}, \frac{3281}{3280},$

b) $1, 3, 2, \frac{5}{2}.$

9.5. Tak.

6.6. **Wskazówka:** Ponieważ $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 10 \end{cases}$, więc $a_{n+1} - a_n = 10 = \text{const.}$

Zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny o wyrazie pierwszym $a_1 = 2$ i różnicy $r = 10$.

9.7. **Wskazówka:** $a_{n+1} = 2a_n + 1 \Leftrightarrow a_{n+1} - 2a_n = 1.$

Zatem $2^{n+1} + 1 - 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 1 - 2^{n+1} + 2 = 1.$ **c.n.u.**

9.8. b) $a_{21} = 20, a_{22} = 21.$

Wskazówka: a) $a_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{2n - 1} = \frac{(2n - 1)(n - 1)}{2n - 1} = n - 1,$

b) rozwiąż równanie $(n - 1)^3 - n^3 = -1261.$

9.9. a) $a_n = n - 7\frac{1}{2},$

b) $a_n = \frac{4}{3}n + \frac{1}{3},$

c) $a_n = 9 \cdot 10^{n-1}.$

Wskazówka: Skorzystaj z zależności $a_n = S_n - S_{n-1}.$

9.10. a) $n = 3,$

b) $a_1, a_2, a_5.$

9.11. a) $2, \frac{5}{4}, \frac{41}{40}, \frac{3281}{3280},$

b) $1, 3, 2, \frac{5}{2}.$

9.12. $a = 3n + 4.$

9.13. Wyraz a_1 i wszystkie wyrazy od dziesiątego począwszy, czyli $a_{10}, a_{11}, \dots$

Wskazówka: $6x^2 - 13x + 6 > 0$, gdy $x < \frac{2}{3}$ lub $x > \frac{3}{2}$. Zatem wyrazy ciągu spełniają warunek

$\frac{2n}{n+3} < \frac{2}{3}$ lub $\frac{2n}{n+3} > \frac{3}{2}$, czyli $n < \frac{3}{2}$ lub $n > 9.$

9.14. **Wskazówka:** Uzasadnij, że nierówność $(2n + 1)(2n - 1) < 0$, gdy $n \in \mathbb{N}^+$, nie ma rozwiązania.

9.15. Ciąg (a_n) jest: a) rosnący, b) niemonotoniczny, c) malejący.

9.16. Ciąg (a_n) jest: a) malejący, b) rosnący.

9.17. **Wskazówka:** Uzasadnij, że spełniona jest nierówność $a_{n+1} - a_n < 0$, gdy $n \in \mathbb{N}^+$.

9.18. $a_5 - b_5 = 390$.

Wskazówka: Zauważ, że $a_5 = \binom{13}{9} = 715$, oraz $b_2 = 13, b_3 = 37, b_4 = 109, b_5 = 325$.

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny

9.19. $\begin{cases} q=1 \\ a_1 = \frac{62}{3} \end{cases}$ lub $\begin{cases} q=5 \\ a_1 = 2 \end{cases}$.

Wskazówka: Liczby $a_1 = a$, $a_2 = aq$, $a_3 = aq^2$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Z warunków zadania wynika, że

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 62 \\ aq^2 - aq = 5(aq - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + aq + aq^2 = 62 \\ aq(q-1) - 5a(q-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + aq + aq^2 = 62 \\ a(q-1)(q-5) = 0 \end{cases}.$$

9.20. Szukane liczby to: 8, 5, 2 lub 2, 5, 8.

Wskazówka: Liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny, czyli $b = a + r$, $c = a + 2r$. Liczby $a, b-1, c$ tworzą ciąg geometryczny. Z warunków zadania otrzymasz układ

równań $\begin{cases} a + a + r + a + 2r = 15 \\ ((a+r-1)^2 = a(a+2r)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + r = 5 \\ 16 = a(10-a) \end{cases}$.

9.21. $\begin{cases} a_9 = 2 \\ q = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_9 = 32 \\ q = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Wskazówka: Skorzystaj z wzoru $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, gdzie $q \neq 1$

i uwzględnij warunki zadania $a_1 = 2$ i $S_8 = 5 \cdot S_4$, otrzymasz równanie $\frac{2(1-q^8)}{1-q} = \frac{5 \cdot 2(1-q^4)}{1-q}$,

gdzie $q^4 > 0$ i $q \neq 1$.

Stąd $q^8 - 5q^4 + 4 = 0$, gdzie $q^4 > 0$ i $q \neq 1$. Uwaga: Jeżeli $q = 1$, to $S_8 \neq 5 \cdot S_4$.

9.22. Szukane liczby to 31, 31, 31 lub 3, 15, 75.

Wskazówka: Liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny i niech $a = a_1, b = a_2, c = a_7$ są wyrazami ciągu arytmetycznego, czyli $a_1 = a, b = a + r, c = a + 6r$, gdzie r to różnica ciągu. Z warunków zadania otrzymu-

jesz układ równań:
$$\begin{cases} a + b + c = 93 \\ b^2 = ac \end{cases}$$
. Uwzględniając, że $a_1 = a, b = a + r, c = a + 6r$, otrzymujesz

$$\begin{cases} a + a + r + a + 6r = 93 \\ (a + r)^2 = a(a + 6r) \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} a = 31 \\ r = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = 3 \\ r = 12 \end{cases}.$$

9.23. $x = 2$.

Wskazówka: Z własności ciągu geometrycznego:

$$(x^2 + 3x)^2 = (x+3)(11x-2) \Leftrightarrow (x+3)(x-2)(x^2 + 5x - 1) = 0.$$

Wyrazy ciągu są liczbami całkowitymi, gdy $x = 2$ lub $x = -3$.

Dla $x = -3$ ciąg nie jest geometryczny $(0, 0, -35)$, dla $x = 2$ ciąg jest geometryczny $(5, 10, 20)$.

9.24. Dziewięć wyrazów.

Wskazówka: $q^2 = \frac{a_4}{a_2} = \frac{1}{4}$, więc $q = -\frac{1}{2}$ lub $q = \frac{1}{2}$. Ponieważ ciąg nie jest monotoniczny, więc $q = -\frac{1}{2}$ i $a_1 = 160$. $S_n = 106\frac{7}{8}$, gdy $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^9$.

9.25. **Wskazówka:** Ciąg (a_n) jest geometryczny, więc $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, skąd $\log_p a_n^2 = \log_p (a_{n-1} \cdot a_{n+1})$ (logarytmowanie stronami), czyli $\log_p a_n = \frac{\log_p a_{n-1} + \log_p a_{n+1}}{2}$.

9.26. $r = 0$ i $a_1 \neq 0$ lub $r \neq 0$ i $a_1 = 2r$.

Wskazówka: Z warunków zadania: $\frac{a_1}{a_1 + r} = \frac{a_1 + 2r}{a_1 + 4r}$, skąd $r(a_1 - 2r) = 0$. Jeśli $r = 0$, to $a_1 \neq 0$ lub jeśli $a_1 = 2r$, to $r \neq 0$.

9.27. **Wskazówka:** $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$, skąd

$$a^2 - ab + ac + ab - b^2 + bc + ac - bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2, \text{ czyli } -2b^2 + 2ac = 0 \text{ więc } b^2 = ac.$$

Zatem liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny.

9.28. $q \in \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

9.29. 10^{19} .

Wskazówka: Jeśli $a_1 q^9 = 10$, to $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{19} = a_1^{19} \cdot q^{1+2+3+\dots+18} = (a_1 q^9)^{19}$.

9.30. $a_1 = 10^{100}$.

Wskazówka: Z warunków zadania:

1° $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99} = 100(a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100})$,

skąd $a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{98}) = 100 \cdot a_1 q(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{98})$, więc $100q = 1$.

2° $\log(a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \dots \cdot a_1 q^{99}) = 100$, czyli $a_1^{100} \cdot q^{1+2+3+\dots+98} = 10^{100}$, więc $a_1^{100} = (10^{100})^{100}$.

9.31. $a_n = \frac{63}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

Wskazówka: Zauważ, że $\frac{a_5 + a_3}{a_3} = \frac{a_5}{a_3} + 1 = q^2 + 1$, $q^2 + 1 = \frac{29}{25}$,

skąd $q = \frac{2}{5}$ lub $q = -\frac{2}{5}$.

Ciąg (a_n) jest malejący i zbieżny, gdy $q = \frac{2}{5}$, więc $a_2 + a_4 + a_6 + \dots = 6$, czyli $\frac{a_1 q}{1 - q^2} = 6$, skąd $a_1 = \frac{63}{5}$.

9.32. **Wskazówka:** Wykaż, że iloraz $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest liczbą (nie zależy od n).

9.33. a) $k > 0$, b) $k = \sqrt{2} + 1$.

Wskazówka: a) $a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k(n+1)}{n+1} - \frac{kn}{n+1} > 0 \\ n \in \mathbb{N}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$,

b) $a_5 = \frac{a_2 + (\sqrt{2} + 1)}{2} \Leftrightarrow \frac{5k}{6} = \frac{\frac{2}{3}k + \sqrt{2} + 1}{2}$.

9.34. **Wskazówka:** Z warunku zadania i własności ciągu arytmetycznego: $\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}$,

czyli $\frac{2}{a+c} = \frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}$, skąd $b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$.

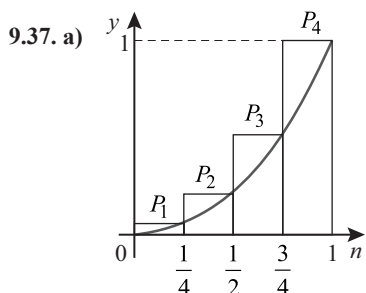
9.35. a) $x_0 = 25$, b) $x_0 = 184$, c) $x_0 = 20\frac{2}{3}$.

9.36. $S_{12} = 660$.

Wskazówka: Liczby 11, 19, 27, ..., 99 tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r = 8$,

w którym $a_1 = 11$ i $a_n = 99$, czyli $99 = 11 + (n-1) \cdot 8$, skąd $n = 12$.

Zatem $S_{12} = \frac{11+99}{2} \cdot 12$.



$$S_4 = \frac{15}{32},$$

b) $S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$

Wskazówka: a) $S_4 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{16} = \frac{1}{4 \cdot 16} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2).$

b) $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3} =$

$$= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

9.38. **Wskazówka:** $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1, a_4 = 2 \cdot (-1) - 1 = -3.$

Zauważ, że kolejne wyrazu ciągu (a_n) różnią się o 2, więc $r = -2$ i $a_1 = 3$. Zatem $a_n = 3 + (n-1) \cdot (-2).$

Granica ciągu

Nr zadania	9.39. a)	9.39. b)	9.39. c)	9.39. d)	9.39. e)	9.39. f)
Odpowiedzi	$\frac{3}{2}$	-5	1	0	0	$2\sqrt{2}$

Nr zadania	9.40. a)	9.40. b)	9.40. c)	9.40. d)	9.40. e)	9.40. f)
Odpowiedzi	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	nie istnieje

Nr zadania	9.41. a)	9.41. b)	9.41. c)	9.41. d)	9.42. a)	9.42. b)	9.43. a)	9.43. b)	9.43. c)
Odpowiedzi	$\frac{1}{4}$	-1	0	0	$\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{6}$	$+\infty$	$-\frac{2}{5}$	2

Nr zadania	9.43. d)	9.43. e)	9.43. f)	9.44. a)	9.44. b)	9.44. c)	9.44. d)
Odpowiedzi	2	0	2	-1	0	-3	$\frac{5}{128}$

- 9.45. a) 1, b) $\frac{4}{3}$, c) $\frac{1}{16}$, d) 0,
 e) 1, f) 1, g) $+\infty$.

Wskazówka: c) $a_n = \frac{1+6+6^2+\dots+6^{n-1}}{1-36^n} = \frac{1 \cdot \frac{1-6^n}{1-6}}{1-6^{2n}} = \frac{\frac{1}{5}(6^n-1)}{(1-6^n)(1+6^n)} = -\frac{1}{5(1+6^n)}.$

f) Przekształć wyrażenie $n+5n+9n+13n+\dots+(4n^2-3n)$ do postaci $n[1+5+9+13+\dots+(4n-3)]$

i zastosuj wzór na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego, skąd $a_n = \frac{(n+1)(2n-1)}{n+2}.$

- 9.46. a) Tak, b) tak, c) tak, d) tak.

Wskazówka: b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} : \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = 4,$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7 \cdot (1-7^n)}{(1-7) \cdot (3 \cdot 7^n - 2)} = \frac{7}{18},$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}.$

- 9.47. a) ∞ , b) $\frac{1}{2}$, c) 0.

Wskazówka: Zauważ, że:

a) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}(1+2+3+\dots+n-1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+n-1}{2} \cdot (n-1) = \frac{n-1}{2},$

b) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1+2+3+\dots+n-1) = \frac{n-1}{2n}.$

c) $a_n = \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \dots + \frac{n-1}{n^3} = \frac{n-1}{2n^2}.$

- 9.48. a) 1, b) 1.

Wskazówka: Zauważ, że:

a) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^2}}}} \right)} = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^2}}}},$

b) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2-n}} = \frac{\sqrt[3]{n^2} \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \right)}{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}}.$

9.49. a) 0, b) 0, c) $+\infty$.

Wskazówka: Zauważ, że:

$$\text{a) } a_n = \frac{5(n-1)!}{n!} = \frac{5 \cdot (n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{5}{n},$$

$$\text{b) } a_n = \frac{(3n-2)!}{(3n)!} = \frac{(3n-2)!}{(3n-2)!(3n-1) \cdot 3n} = \frac{1}{3n(3n-1)},$$

$$\text{c) } a_n = \frac{(n-1)! + (n+1)!}{5n!} = \frac{(n-1)! [1 + n(n+1)]}{5n(n-1)!} = \frac{n^2 + n + 1}{5n} = \frac{n+1 + \frac{1}{n}}{5}.$$

9.50. a) $p=1$, b) $p=-7$, c) $p_1=-6$, $p_2=1$.

9.51. $p=3$.

Wskazówka: Oblicz granice:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right)^2}{n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{5}{n}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right)^2}{n^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{5}{n}\right)^2}{\left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = 1.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(p+1) \cdot \frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)} + (2p+2) \cdot \frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)} \right] = \\ &= (p+1) \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)} + (2p+2) \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)} = \\ &= (p+1) \cdot 1 + (2p+2) \cdot 1 = 3p+3. \text{ Z warunków zadania : } 12 = 3p+3. \end{aligned}$$

9.52. a) $k=-4$, b) $k=-1$, c) $k>2$.

Wskazówka: a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{k+1}$, gdy $k \neq -1$, b) $a_n = -3n-2$, gdy $k = -1$, c) $a_n = \frac{n^k}{n^2+n}$.

9.53. a) $a_n = 9-6n$, b) -59100 , c) 36.

Wskazówka: a) $a_n = S_n - S_{n-1} = 9-6n$ i $a_1 = S_1$,

b) sto początkowych wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych tworzy ciąg arytmetyczny (b_n) ,

w którym $b_1 = a_1 = 3$, $b_2 = a_3 = -9$, skąd $r = -12$ oraz $S_{100} = \frac{[3+3+99 \cdot (-12)] \cdot 100}{2} = -59100$,

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{n^2 - a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(9-6n)^2}{n^2 - (9-6n)} = 36.$$

9.54. $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1998$.

Wskazówka: Z układu $\begin{cases} a_1 + 3r = 4007 \\ a_1 + 6r = 7004 \end{cases}$ obliczamy $r = 999$ i $a_1 = 1010$, więc $a_n = 1010 + (n-1) \cdot 999$.

Z układu $\begin{cases} b_1 q^2 = 1,25 \\ b_1 (1 + q + q^2) = 8,75 \end{cases}$ obliczamy $q = -\frac{1}{3}$ lub $q = \frac{1}{2}$ oraz $b_1 = 5$.

Ponieważ ciąg (b_n) jest monotoniczny, to $q = -\frac{1}{3}$ nie spełnia warunków zadania.

Zatem $b_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ i $c_n = \frac{2 \cdot [1010 + (n-1)999]}{n \left[5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \right]} = \frac{2 \cdot 999n + 2 \cdot 11}{n \left[5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \right]}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 2 \cdot 999 = 1998$.

9.55. $a_n = 4 - \frac{1}{n}$, gdy $k = 1$.

Wskazówka: $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -k^2 + 2k + 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 4 \end{cases}$, skąd $k = 1$.

9.56. **Wskazówka:** a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a = a$.

9.57.a) 7,

b) 8,

c) 10,

d) 12.

Wskazówka: a) Skorzystaj z twierdzenia o trzech ciągach, szukaj ciągów spełniających warunki:

$$3 \cdot 6^n < 4^n + 2 \cdot 5^n + 3 \cdot 6^n < 6^n + 2 \cdot 6^n + 3 \cdot 6^n.$$

Sprawdź każdą stronę nierówności:

$$\sqrt[n]{3 \cdot 6^n} < \sqrt[n]{4^n + 2 \cdot 5^n + 3 \cdot 6^n} < \sqrt[n]{6^n + 2 \cdot 6^n + 3 \cdot 6^n}.$$

Oblicz granice ciągów skrajnych:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 \cdot 6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \cdot \sqrt[n]{3} = 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 6 \cdot 1 = 6.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6 \cdot 6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \cdot \sqrt[n]{6} = 6 \cdot 1 = 6.$$

Spełnione są założenia twierdzenia o trzech ciągach, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 2 \cdot 5^n + 3 \cdot 6^n} = 6$.

b) Zauważ, że: $4 \cdot 8^n < 5 \cdot 3^n + 4 \cdot 8^n < 5 \cdot 8^n + 4 \cdot 8^n = 9 \cdot 8^n$.

9.58. 2.

Wskazówka: Do oszacowania wyrazu ogólnego ciągu (a_n) wykorzystaj fakt, że pierwszy składnik sumy jest największy, a ostatni składnik tej sumy jest najmniejszy.

$$n \cdot \frac{2}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{n^2+n}} \leq n \cdot \frac{2}{\sqrt{n^2+n}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 2.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 2.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Szereg geometryczny i jego suma

$$9.59. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{-2}{1-\frac{1}{2}} = -4, \quad \text{ b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{15}{2}.$$

Wskazówka: Jeśli $|q| < 1$, to $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

$$9.60. \text{ a) } 3(\sqrt{3}+1), \quad \text{ b) } \sqrt{2}+1, \quad \text{ c) } \frac{5\sqrt{5}}{4}.$$

$$9.61. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{200}{9}, \quad \text{ b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Wskazówka: a) } S_n = \frac{20 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{200}{9} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right],$$

$$\text{b) } S_n = \frac{1,25 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

$$9.62. S = 1 + \sqrt{3}.$$

$$\text{Wskazówka: } a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ i } a_2 = \frac{2}{3}, \text{ więc } q = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Zatem } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

9.63. a) $x = \frac{1}{2}$,

b) $x = \frac{3}{8}$,

c) $x = \frac{2}{3}$,

d) $x = 4$,

e) $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

f) $x = 1$.

Wskazówka: f) Zauważ, że $x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8x} + \dots = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{8x} + \dots\right)$.

9.64. a) $x \in (-3; +\infty)$,

b) $x \in (-1; 1)$,

c) $x \in \left(-2; -\frac{1}{4}\right)$,

d) $x \in (0; +\infty)$.

9.65. **Wskazówka:** Zauważ, że: $0, (1) = \frac{1}{9}$, $\sin 690^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$.

9.66. **Wskazówka:** Jeśli $|q| < 0$, to $1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}$ oraz $1 - q + q^2 - q^3 + \dots = \frac{1}{1+q}$.

9.67. a) $P_5 = \frac{a^2\sqrt{3}}{1024}$,

b) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Wskazówka: a) Zauważ, że długości boków trójkątów T_n tworzą ciąg geometryczny (b_n)

o ilorazie $q = \frac{1}{2}$, w którym $b_1 = a$, $b_2 = \frac{1}{2}a$, $b_3 = \frac{1}{4}a$, ..., $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot a$, ...

Pole P_n każdego z trójkątów T_n będzie więc dane wzorem $P_n = \frac{b_n^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left[a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2^{2n}}$.

b) $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2^{2(n+1)}} : \frac{a^2\sqrt{3}}{2^{2n}} = \frac{1}{4} = q$. Zatem jest to ciąg geometryczny zbieżny (bo $\frac{1}{4} \in (-1; 1)$) i jego

suma $S = \frac{S_1}{1-q} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ ($S_1 = a_1$).

9.68. $n \in \mathbb{N}^+$ i $n > 9$.

Wskazówka: Ponieważ istnieje suma tego ciągu, więc $q \in (-1; 1)$ i $q \neq 0$.

Oblicz a_1 i q , rozwiązując układ równań: $\begin{cases} S = \frac{16}{3} \\ S_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = \frac{16}{3} \\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$ Z warunków

zadania $|S - S_n| < \frac{1}{96} \Leftrightarrow \left| \frac{16}{3} - \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \right| < \frac{1}{96} \Leftrightarrow \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right| < \left(\frac{1}{2}\right)^9 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}\right|^n < \left(\frac{1}{2}\right)^9$, skąd $n > 9$.

9.69. $k = \frac{1}{2}$.

Wskazówka: Ponieważ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{k}{1+k^2}$, więc badamy dla jakich k funkcja $f(k) = \frac{k^2}{1+k^2}$

ma wartość największą. $D_f = \mathbf{R}$ i $\lim_{k \rightarrow -\infty} f(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = 0$ i $f'(k) = 0$, gdy $k = -1$ lub $k = 1$.

9.70. $m \in (-\sqrt{5}; -2) \cup (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{5})$, $S = \frac{1}{(m+2)(5-m^2)}$.

9.71. $f(x) = 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \dots = \frac{2x^2}{1-x}$, gdy $x \in (-1; 1)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ lub $x = 2$ i $2 \notin (-1; 1)$,

9.72. $D_f = (1; 2) \cup (3; 4)$, $Y_f = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Wskazówka: Zauważ, że $-1 < x^2 - 5x + 5 < 1$ (bo $|q| < 1$) i $f(x) = \frac{-1}{x^2 - 5x + 4}$.

Wykaż, że funkcja f nie ma ekstremów w zbiorze D_f . Oblicz granice jednostronne na końcach przedziałów

$(1; 2)$ i $(3; 4)$.