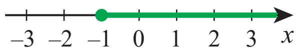
Spis treści

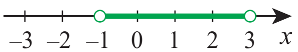
12. Na osi liczbowej zaznacz przedział $\langle -8; 3)$.

Uzupełnij zdanie i w miejsce .... wpisz odpowiednie liczby.

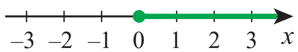
1. Wszystkie liczby naturalne należące do tego przedziału, to ....
2. Liczbą najmniejszą należącą do tego przedziału jest ....
3. Wszystkie liczby całkowite z tego przedziału nie mniejsze niż zero, to ....
4. Liczby naturalne dodatnie należące do tego przedziału, to ....

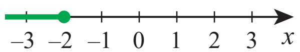
13. Przyporządkuj każdemu przedziałowi przedstawionemu na osiach liczbowych oznaczonych literami od A do F, odpowiedni opis słowny, oznaczony cyframi od 1 do 6.

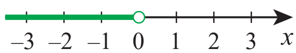
A. 

B. 

C. 

D. 

E. 

F. 

1. Liczby rzeczywiste nieujemne.
2. Liczby rzeczywiste mniejsze lub równe –2.
3. Liczby rzeczywiste większe od –1 i mniejsze od 3.
4. Liczby rzeczywiste ujemne.
5. Liczby rzeczywiste większe od –1 i mniejsze lub równe 2.
6. Liczby rzeczywiste większe lub równe –1.

Równania i nierówności z bezwzględną wartością

3.21. Używając symbolu wartości bezwzględnej zapisz zbiór tych punktów x, dla których odległość na osi liczbowej:

a) od punktu 0 jest równa 5, **b)** od punktu –1 jest równa 4.

3.22. Rozwiąż równanie:

a) $|-x| = 10$, **b)** $-(|a| - 9) = 7$, **c)** $|4 + z| = -1$, **d)** $\left|\frac{c}{3} + 1\right| = 2$.

3.23. Na osi liczbowej zaznacz zbiór tych punktów, których odległość:

a) od punktu $M = (-2)$ jest większa od 2,

b) od punktu $M = (-5)$ jest mniejsza od 4.

c) $M = (-4)$ jest mniejsza od 1, **d)** $K = (-1)$ jest co najwyżej równa 5.

3.17. **a)** 63 zł, **b)** o 3 zł. *Wskazówka*. $1{,}07x = 64{,}20$, gdzie x to cena towaru bez podatku VAT.

3.18. Czas krótszy niż 11,33 s.

3.19. Po 20 dniach. *Wskazówka*. $5 + 6x > 125$, gdzie x – liczba dni.

3.20. Co najmniej 34 sztuki. *Wskazówka*. $30x > 1000$, gdzie x to liczba sztuk przedmiotu i $x \in \boldsymbol{N}^+$.

Zadania zamknięte – rozwiązywanie równań i nierówności liniowych

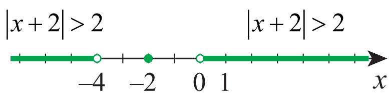
Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12.1	12.2	12.3	12.4	13
Odpowiedź	A2	F, P	C	B	B	D	C	C	B	C	C	0, 1, 2	–8	0, 1, 2	1,2	1-D, 2-E, 3-B, 4-F, 5-C, 6-A

Równania i nierówności z bezwzględną wartością

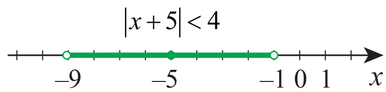
3.21. **a)** $|x| = 5$, **b)** $|x+1| = 4$.

3.22. **a)** $x = -10$ lub $x = 10$, **b)** $a = -2$ lub $a = 2$, **c)** równanie sprzeczne, **d)** $c = -9$ lub $c = 3$.

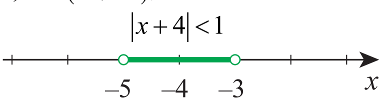
3.23. **a)** $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$,



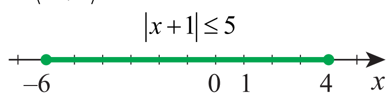
b) $x \in (-9; -1)$.



c) $x \in (-5; -3)$,

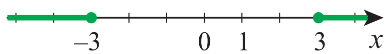


d) $x \in \langle -6; 4 \rangle$.



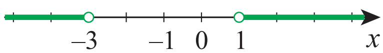
3.24. **a)**

b)



c)

d)



3.25. **a)** $x \in \langle -2; 6 \rangle$, **b)** $x \in \boldsymbol{R}$, **c)** $x \in \left\langle -1; \frac{1}{3} \right\rangle$, **d)** $x \in (-\infty; -1)$ lub $x \in (5; +\infty)$.

Wskazówka. **c)** $\sqrt{(3x+1)^2} = |3x+1|$, **d)** $\sqrt{(2-x)^2} = |2-x| = |x-2|$.

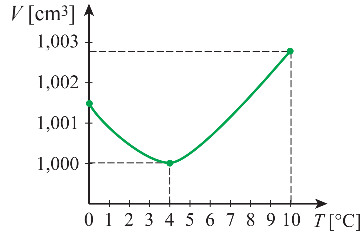
3.26. **a)** $|x| < 6$, **b)** $|x| \le 4$, **c)** $|x| > 3$, **d)** $|x| \ge 5$, **e)** $|x - 1{,}5| < 1{,}5$, **f)** $|x - 2{,}5| \le 1{,}5$.

Wskazówka. **e)** $-1{,}5 < x - 1{,}5 < 1{,}5$, czyli $x \in (0; 3)$, **f)** $-1{,}5 \le x - 2{,}5 \le 1{,}5$, czyli $x \in \langle 1; 4 \rangle$.

Zadania zamknięte – równania i nierówności z bezwzględną wartością

Nr zadania	14	15	16	17	18
Odpowiedź	F, P	C	B	C	B

4.9. **D** Na wykresie przedstawiono anomalny charakter rozszerzalności cieplnej jednego grama wody.



1 Odczytaj z wykresu i podaj maksymalne przedziały:

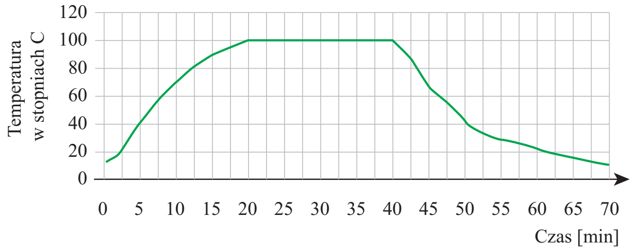
a) dla jakich temperatur T objętość wody maleje,

b) dla jakich temperatur T objętość wody rośnie,

c) dla jakiej temperatury T objętość wody jest najmniejsza.

2 Przeanalizuj wykres i uzasadnij, dlaczego w jeziorach woda nie zamarza do dna.

4.10. Na wykresie przedstawiono zmiany temperatury wody. Przeanalizuj wykres i odpowiedz na pytania.



a) Po upływie ilu minut woda zaczęła wrzeć?

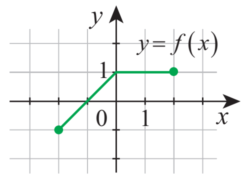
b) Jak długo woda wrzała?

c) Jak długo trwało podgrzewanie wody?

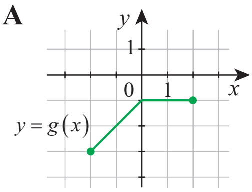
d) Do jakiej temperatury woda ostygła?

e) Jaką temperaturę woda osiągnęła po upływie 2,5 minuty od początku ogrzewania?

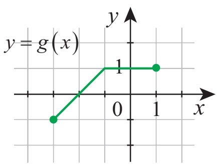
4.11. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f, której $D_f = \langle -2; 2 \rangle$. Na rysunkach A, B, C i D wykresy są obrazami wykresu funkcji f w pewnym przekształceniu. Nazwij to przekształcenie i uzupełnij zdania.



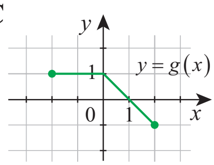
A



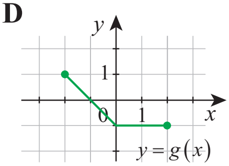
B



C



D



1 Wykres funkcji g na rysunku **A** jest obrazem wykresu funkcji f w przesunięciu równoległym do osi .... o .... jednostki w .... , więc $g(x) =$ ....

2 Wykres funkcji g na rysunku **B** jest obrazem wykresu funkcji f w przesunięciu równoległym do osi .... o .... jednostkę w .... , więc $g(x) =$ ....

3 Wykres funkcji g na rysunku **C** jest obrazem wykresu funkcji f w symetrii względem osi .... , więc $g(x) =$ ....

4 Wykres funkcji g na rysunku **D** jest obrazem wykresu funkcji f w symetrii względem osi .... o .... jednostek w .... , więc $g(x) =$ ....

Odpowiedzi i wskazówki

4. Funkcje

Sposoby określania funkcji i jej własności

4.1. A i C.

4.2. Nie. *Wskazówka*. Sprawdź, czy $f\left(\sqrt{2}+1\right)=-1$, gdzie $f\left(\sqrt{2}+1\right)=\left|\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}+1\right)\right|=\left|-1\right|=1$.

4.3. $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$. **4.5.** *Wskazówka*. Sprawdź, czy $f(-2)=1$, gdy $f(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}x}{x+3}$.

4.6. **a)** $g(x)=1-x$, **b)** $g(x)=4x-5$.

4.7. *Wskazówka*. Jeżeli $f(x)=2x$, to $f(a-b)=2\cdot(a-b)$, $f(a)=2a$, $f(b)=2b$.

4.8. 1 12:00, 2 900, 1000, 3 9:00, 15:00, 18:00.

4.9. 1 **a)** $\langle 0°; 4°\rangle$, **b)** $\langle 4°; 10°\rangle$, **c)** 4°.

4.10. **a)** Po upływie 20 minut, **b)** 20 min (od 20 – 40 min.), **c)** 40 min, **d)** do około 10°, **e)** 20°.

4.11. 1 osi y – o 2 jednostki w dół, $g(x)=f(x)-2$, 2 osi x o 1 jednostkę w lewo, $g(x)=f(x+1)$, 3 y i $g(x)=f(-x)$, 4 x, $g(x)=-f(x)$.

Zadania zamknięte – sposoby określania funkcji i jej własności

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	F, P	F, P	B2	C	D	D	B	A, D i F

Funkcja liniowa

4.12. **a)** $(0,-3)$, wykres nie przecina osi x, **b)** $\left(0,\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$, **c)** $\left(0,1+\sqrt{2}\right)$, $(1,0)$.

4.13. **a)** $y=-2x+3$, **b)** $x_0=\frac{3}{2}$, **c)** $y=-2x+32$. *Wskazówka*. **a)** Wykres funkcji f przechodzi np. przez punkty o współrzędnych $(0,3)$ i $(2,-1)$, **c)** $0=-2\cdot 16+b$, stąd $b=32$.

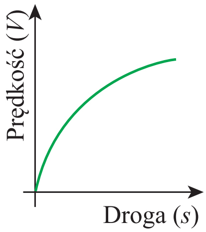
4.14. **a)** 60°, **b)** 135°, **c)** 0°. *Wskazówka*. Współczynnik kierunkowy $a=\operatorname{tg}\alpha$.

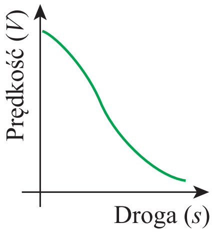
4.15. **a)** $y=\sqrt{3}x+1$, **b)** $y=-x+1$.

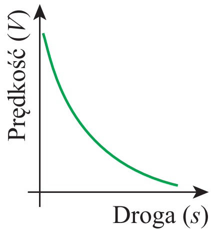
4.16. *Wskazówka*. $f(x+1)=a(x+1)+b$, zatem $f(x+1)-f(x)=ax+a+b-(ax+b)$.

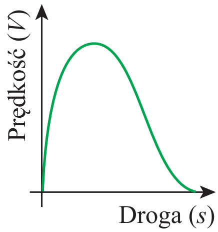
4.17. **a)** $k>3$, **b)** $k<\frac{9}{2}$, **c)** $k=-\frac{2}{3}$. *Wskazówka*. **a)** $-2k+6<0$, **b)** $3-\frac{2k+3}{4}>0$, **c)** $\frac{3k+2}{5}=0$.

6. Dziecko zjeżdża z górki na sankach. Zmianę prędkości V jazdy opisuje wykres:

A.


B.


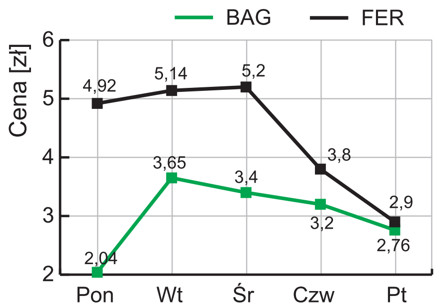
C.


D.


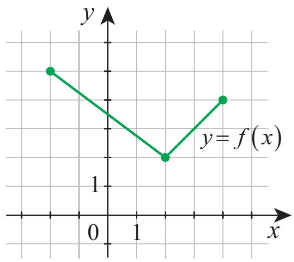
7. Kształtowanie się wartości akcji dwóch firm: BAG i FER w ciągu tygodnia przedstawiono na diagramie. W piątek za 100 akcji FER i 50 akcji BAG trzeba było zapłacić:

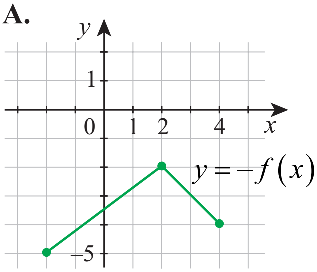
A. 421 zł **B.** 428 zł

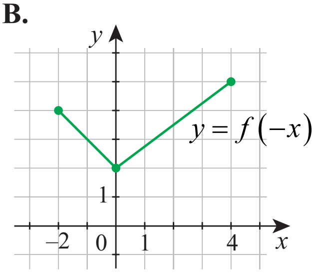
C. 849 zł **D.** 556 zł

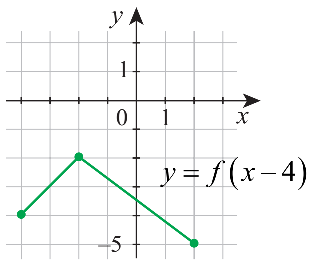


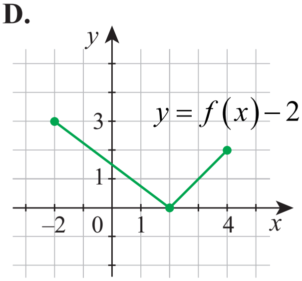
8. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$, a na rysunkach A, B, C, D, E, F Emilka narysowała obrazy wykresu funkcji f w pewnym przekształceniu i opisała je. Podaj **<u>trzy</u>** obrazy funkcji f, które są opisane poprawnie.

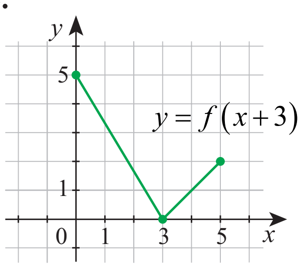


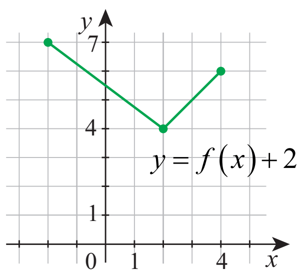
A.


B.


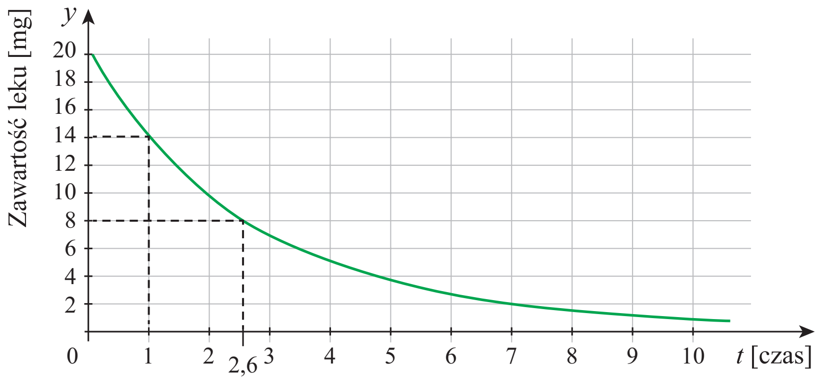
C.


D.


E.


F.


4.61. Lekarstwa, które przyjmuje człowiek, są stopniowo eliminowane przez organizm. Ilość leku, która pozostaje w organizmie, zależy od wielkości dawki leku oraz czasu liczonego od momentu zażycia lekarstwa. Zależność ta wyrażona jest wzorem $f(t) = d \cdot (0,7)^t$, gdzie d – to dawka leku wyrażona w mg, t – to czas działania leku mierzony w godzinach i $t \geq 0$. Pacjent przyjął 20 mg leku. Na wykresie przedstawiono ilość leku, która pozostaje w organizmie.



a) Oblicz, ile mg leku znajduje się w organizmie pacjenta po upływie 4 godzin od momentu zażycia lekarstwa.

b) Oblicz, ile procent leku pozostającego w organizmie jest eliminowana w ciągu każdej godziny.

c) Odczytaj z wykresu czas, w jakim ilość leku w organizmie była większa niż 8 mg, ale mniejsza od 14 mg.

4.62. Po zagotowaniu wody odstawiono pojemnik w pomieszczeniu, w którym temperatura była równa 20°C. Temperatura stygnącej wody wyrażona jest wzorem $f(t) = 20 + k \cdot a^{-t}$, gdzie k oraz a zależą od temperatury początkowej i ilości wody. Jeśli przyjmiemy, że w momencie $t = 0$ temperatura była równa 100°C, to w momencie $t = 10$ minut już tylko 63°C. Oblicz temperaturę wody po 60 minutach.

4.63. *W miejsce .... wstaw takie wyrażenie, aby zdanie było prawdziwe.*

1 Jeśli funkcja wykładnicza $y = a^x$ jest malejąca, to podstawa a jest liczbą z przedziału ....

2 Wykresy wszystkich funkcji $y = a^x$ przecinają się w punkcie o współrzędnych ....

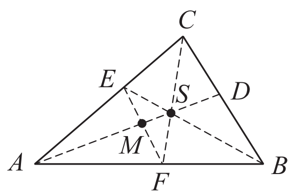
3 Wykresy funkcji $y = a^x$ oraz $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ są wzajemnie symetryczne względem osi ....

10.59. **D** W trójkącie ABC, gdzie $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wykaż, że $|AD| = \frac{bc}{a+b}$ i $|BD| = \frac{ac}{a+b}$.

10.60. Trójkąt o bokach długości 10, 12, 14 podzielono dwusieczną największego kąta na dwie części. Oblicz stosunek pól tych części.

Zadania zamknięte – punkty szczególne w trójkącie

21. W trójkącie ABC poprowadzono środkowe: AD, BE i CF, przecinające się w punkcie S. Odcinki AD i EF przecinają się w punkcie M jak na rysunku.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

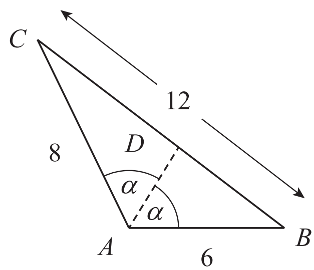


$|SD| = \frac{1}{3}|AD|$	**P**	**F**

$|MD| = \frac{1}{2}|AD|$	**P**	**F**

$|MS| = \frac{1}{6}|AD|$	**P**	**F**

22. W trójkącie ABC $|AB| = 6$, $|BC| = 12$, $|AC| = 8$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie D, jak na rysunku.

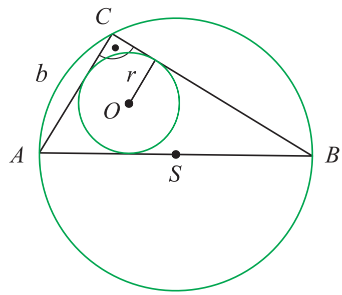


Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1. albo 2.

Długość odcinka BD jest równa:

A.	$|BD| = \frac{4}{3}\sqrt{22}$,	ponieważ z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że:	**1.**	$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|BD|}$.
B.	$|BD| = \frac{1}{2}\sqrt{22}$,		**2.**	$|BD| = |DC|$.
C.	$|BD| = \frac{2}{3}\sqrt{22}$,		**3.**	$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$.

10.51. $2\pi\left(\sqrt{3}+1\right)$. *Wskazówka*. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.



$2\pi r = 2\pi$, więc $r = 1$ oraz $R = b$.

$P_\Delta = pr$, gdzie $p = \dfrac{b + a\sqrt{3} + 2b}{2}$ i $r = 1$ oraz

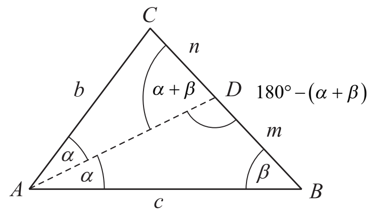
$P_\Delta = \dfrac{1}{2} b \cdot b\sqrt{3}$. Zatem $\dfrac{1}{2} b\left(3+\sqrt{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} b^2$, skąd $b = \sqrt{3}+1$.

10.52. $(-2, 0)$. **10.53.** **a)** $\left(\dfrac{152}{37}, \dfrac{89}{37}\right)$, **b)** $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$, **c)** $\left(-\dfrac{39}{37}, \dfrac{85}{37}\right)$.

10.54. $|CD| = \dfrac{4}{3}$, $|BD| = \dfrac{5}{3}$. **10.55.** $\dfrac{8\sqrt{13}}{5}$ i $\dfrac{12\sqrt{13}}{5}$.

10.56. 5 lub 20. **10.57.** $3:5$. **10.58.** $\dfrac{24}{5}$ lub $\dfrac{40}{3}$.

10.59. *Wskazówka*. Przyjmij oznaczenia, jak na rysunku.



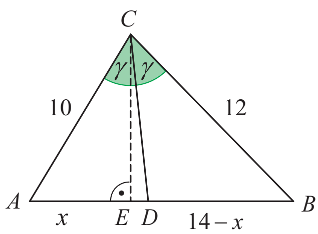
Z warunków zadania: $a = m + n$. Z twierdzenia sinusów dla $\Delta\, ABD$

oraz $\Delta\, ADC$: $\dfrac{m}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\left[180° - (\alpha+\beta)\right]}$ oraz $\dfrac{n}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Dzieląc otrzymane równości stronami otrzymujemy $\dfrac{m}{n} = \dfrac{c}{b}$.

Ponieważ $\dfrac{m}{n} = \dfrac{c}{b}$ i $m + n = a$, stąd $m = \dfrac{ac}{b+c}$ i $n = \dfrac{ab}{b+c}$. ***c.n.w.***

10.60. $\dfrac{5}{6}$. *Wskazówka*. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.



I sposób: $\dfrac{x}{10} = \dfrac{14-x}{12}$, skąd $x = \dfrac{70}{11}$.

Wysokość $h = |CE|$ jest wspólna dla obu trójkątów ADC i DBC.

II sposób: $\dfrac{P_{\Delta\, ADC}}{P_{\Delta\, CDB}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 10\cdot|CD|\cdot\sin\gamma}{\frac{1}{2}\cdot 12\cdot|CD|\cdot\sin\gamma} = \dfrac{10}{12}$.

Zadania zamknięte – punkty szczególne w trójkącie

Nr zadania	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Odpowiedź	Kolejno: P, P, P	C3	P, P	C	D	A	C	A	A

Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów

10.61. **a)** $x = 2\sqrt{3}$, **b)** $x = 2\sqrt{2}$, **c)** $x = \sqrt{30 + 9\sqrt{3}}$.

10.62. **a)** $R = 4\sqrt{3}$, **b)** $R = 4$, **c)** $R = 8\dfrac{1}{2}$.

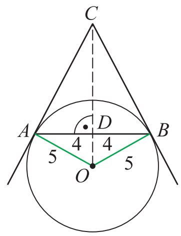
10.10. 40°, 70°, 70°. *Wskazówka*. $|\sphericalangle AOK| = |\sphericalangle LOB| = 40°$.

W trójkącie AKO: $|\sphericalangle KAO| = |\sphericalangle OKA| = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$.

10.11. $P = 21\frac{1}{3}\text{cm}^2$. *Wskazówka*. Zauważamy, że $|OD| = 3$ (trójkąt pitagorejski ADO).

W trójkącie prostokątnym CAO wysokość AD spełnia warunek $|AD|^2 = |OD| \cdot |DC|$,

stąd $|DC| = \dfrac{16}{3}$.



10.12. $\alpha = 40°$. *Wskazówka*. $|\sphericalangle BCD| = 30°$ (kąt między styczną do okręgu a cięciwą),

$|\sphericalangle CBD| = 180° - 70° = 110°$.

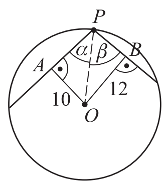
10.13. $\alpha = 30°$. *Wskazówka*. $|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle OBA| = 20°$, $|OA| = |OB| = |BC|$, więc trójkąty AOB i BOC są równoramienne. W trójkącie BOC: $|\sphericalangle OBC| = 180° - 20° = 160°$, $|\sphericalangle BOC| = \dfrac{180° - 160°}{2} = 10°$.

W trójkącie AOB: $|\sphericalangle AOB| = 180° - 2 \cdot 20° = 140°$. Zauważamy, że $\alpha + |\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle BOC| = 180°$.

10.14. $20\sqrt{3}$ cm, 32 cm, około 67°.

Wskazówka. W trójkącie prostokątnym PAO obliczamy $|AP| = \sqrt{20^2 - 10^2}$ i $\sin\alpha = \dfrac{10}{20}$.

W trójkącie prostokątnym POB obliczamy $|BP| = \sqrt{20^2 - 12^2}$ i $\sin\beta = \dfrac{12}{20}$.



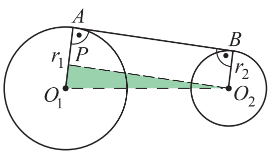
10.15. $\alpha = 30°$. *Wskazówka*. Trójkąt ACO jest prostokątny. Ponieważ

$|BO| = |CO| = \frac{1}{2}|AO|$, więc $|\sphericalangle BOC| = 60°$, stąd $|\sphericalangle OBC| = |\sphericalangle OCB| = 60°$.

10.16. **a)** $|AB| = 80$ cm, **b)** $|AB| = 74{,}6$ cm. *Wskazówka*.

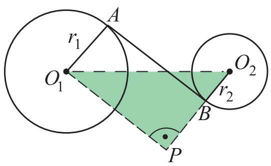
a) W trójkącie O_1PO_2: $|PO_2|^2 = |O_1O_2|^2 - |PO_1|^2$,

czyli $|PO_2|^2 = 82^2 - (r_1 - r_2)^2$.



b) W trójkącie O_1PO_2: $|PO_1|^2 = |O_1O_2|^2 - |PO_2|^2$,

czyli $|PO_1|^2 = 82^2 - (r_1 + r_2)^2$.



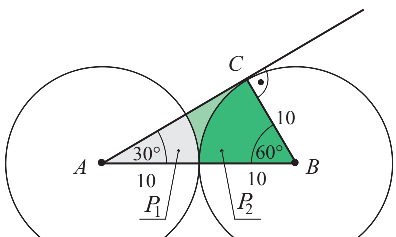
10.17. $P = 100\sqrt{3}$.

10.18. $25\left(2\sqrt{3} - \pi\right)$. *Wskazówka*. $|AC| = 10\sqrt{3}$, więc

trójkąt ABC jest prostokątny o kątach ostrych 30° i 60°.

$P_f = P_{\Delta ABC} - P_1 - P_2$, gdzie $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 10$ oraz

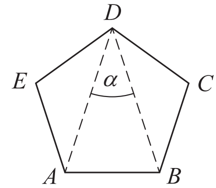
wycinki kół $P_1 = \dfrac{1}{12}\pi \cdot 10^2$ i $P_2 = \dfrac{1}{6}\pi \cdot 10^2$.



10.106. **a)** $\alpha = 67{,}5°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 45°$, $\delta = 45°$, **b)** 5,6 m.

10.107. $P = 54\sqrt{3}$ cm². *Wskazówka*. Zauważ, że bok sześciokąta ma długość $\frac{1}{3} \cdot |KL|$, czyli 6 cm.

10.108. **c)** $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle DBA| = 72°$, $|\sphericalangle ADB| = 36°$.



Wskazówka. **a)** Trójkąty ADE i BDC są przystające na podstawie cechy bkb,

b) $\Delta ADE \equiv \Delta BDC$, więc $|AD| = |BD|$, **c)** $\alpha = 36°$.

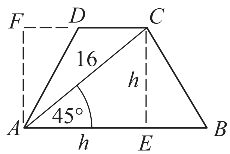
Zadania zamknięte – obliczenia geometryczne z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych

Nr zadania	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
Odpowiedź	P, P	B1	B	C	B	D	C	A	B	C	C	B	C	C	A	C	C

Wskazówki do zadań zamkniętych.

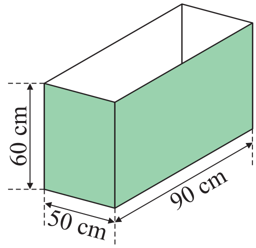
45. $P_{\Delta AKC} = \frac{1}{1+3+4} \cdot P_{\Delta ABC}$.

52. Trójkąt AEC jest prostokątny równoramienny. $\Delta CEB \equiv \Delta DFA$ (cecha bbb), więc pole trapezu jest równe polu kwadratu o przekątnej 16 i boku $h = 8\sqrt{2}$.



53. $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD| = 45°$.

11.40. Oblicz objętość prostopadłościennego kartonu o wymiarach podanych na rysunku. Do tego kartonu zapakowano prostopadłościenne pudełka *P* o wymiarach 10 cm *x* 20 cm *x* 25 cm. Ile takich pudełek maksymalnie zmieści się w kartonie?



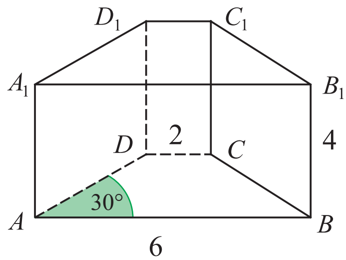
11.41. Długości trzech krawędzi prostopadłościanu są w stosunku $1:2:3$. Jeżeli te krawędzie przedłużymy odpowiednio o 2 m, 1 m i 3 m, to objętość prostopadłościanu zwiększy się o $426\ \text{m}^3$. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu.

11.42. W graniastosłupie prostym podstawą jest trapez równoramienny o podstawach długości 6 i 2 oraz kącie ostrym 30°. Wysokość graniastosłupa jest równa 4. Oblicz:

a) objętość graniastosłupa,

b) długość przekątnej graniastosłupa,

c) cosinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy.



11.43. Z kątownika o długości 6,4 m wykonano szkielet żeberkowy akwarium. Podstawa akwarium jest prostokątem, w którym stosunek długości boków jest równy $2:1$. Zakładając, że nie ma ono górnej pokrywy, oblicz, jakie wymiary powinno mieć akwarium, aby na jego wykonanie zużyć najmniej szkła.

11.44. W graniastosłupie prostym o wysokości 18 podstawą jest romb, którego suma długości przekątnych jest równa 12. Oblicz długość przekątnych podstawy, dla których objętość tego graniastosłupa jest największa.

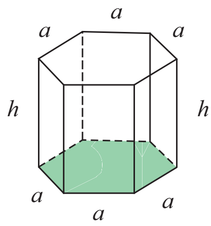
11.45. Długość krawędzi *a*, *b*, *c* prostopadłościanu zapisano za pomocą wyrażeń algebraicznych: $a = 6,\ b = 7 - x,\ c = x - 3$.

a) Wyznacz wymiary prostopadłościanu, dla których jego objętość jest największa.

b) Wyznacz wymiary prostopadłościanu, dla których pole jego powierzchni całkowitej jest największe.

11.46. Oblicz długość krawędzi *a* podstawy i wysokość *h* graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym suma długości wszystkich krawędzi jest równa 216 i który ma największe z możliwych pole powierzchni bocznej. Oblicz tę powierzchnię.

11.46. $a = 9$, $h = 18$, $P_b = 972$.



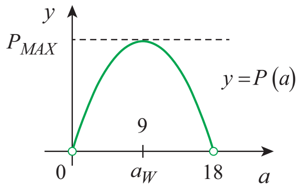
Wskazówka. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

Z warunków zadania $12a + 6h = 216$, skąd $h = 36 - 2a$,

więc $a > 0$ i $h > 0$ oraz $36 - 2a > 0$, czyli $a \in (0; 18)$.

Funkcja $P(a)$ jest funkcją kwadratową określoną dla $a \in (0; 18)$.

$P = P(a) = 6a \cdot (36 - 2a) = -12a^2 + 216a$.



Wykresem tej funkcji jest fragment paraboli o ramionach skierowanych w dół jak na rysunku.

$P_{MAX} = P(a_W)$, gdzie $a_W = \frac{-216}{-24} = 9$,

czyli $a = 9$ i $h = 36 - 2 \cdot 9 = 18$.

$P(9) = -12 \cdot 9^2 + 216 \cdot 9 = 972$ lub $P_{MAX} = P_b = 6 \cdot 9(36 - 18) = 972$.

Zadania zamknięte – graniastosłupy

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	1 – B, 2 – D, 3 – F, 4 – E, 5 – A	Kolejno: F, F,F, P	P, P	P, P	A2	A1	C	C	C	B

Nr zadania	11	12
Odpowiedź	1 – B, 2 – C, 3 – A, 4 – D	B i C

14.27. Tymon miał trzy żetony. Na każdym z nich była inna cyfra spośród 2, 3 i 7. Tymon bawiąc się, zmieniał położenie żetonów, zapisując za każdym razem liczbę trzycyfrową, którą otrzymał. Oblicz, ile Tymon mógł otrzymać różnych liczb, które są:

a) parzyste, **b)** nieparzyste, **c)** większe od 300.

14.28. Młodzi małżonkowie mieli możliwość wybrania mieszkania spośród M_1 i M_2 oraz samochód spośród S_1, S_2 i S_3.

a) Ile różnych możliwości mają ci małżonkowie?

b) Wypisz wszystkie możliwości wyboru małżonków.

14.29. Młodzi małżonkowie mają możliwość wybrania mieszkania spośród M_1 i M_2 albo samochodu spośród S_1, S_2 i S_3. Wypisz i podaj liczbę wszystkich możliwości wyboru małżonków.

14.30. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę.

W miejsce .... wpisz odpowiednią liczbę, aby zdanie było prawdziwe.

1 Liczba wszystkich możliwości otrzymania asa jest równa ....

2 Liczba wszystkich możliwości otrzymania kiera jest równa ....

3 Liczba wszystkich możliwości otrzymania karty młodszej od „szóstki” jest równa ....

14.31. Oblicz, ile jest trzycyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i jedna cyfra 2.

14.32. Oblicz, ile jest czterocyfrowych liczb całkowitych dodatnich, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 5 i jedna cyfra 8.

Zadania zamknięte – zliczanie zdarzeń elementarnych i zdarzeń losowych

11. Abonent zapomniał dwóch ostatnich cyfr numeru telefonu.

Aby trafić na właściwy numer, abonent będzie musiał wykonać maksymalnie:

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1. albo 2.

<table>
<tr><td>A.</td><td>100 prób,</td><td rowspan="2">ponieważ</td><td>1.</td><td>dwukrotnie wybiera jedną cyfrę z dziesięciu i drugą z dziewięciu, czyli zgodnie z regułą mnożenia $10 \cdot 9 = 90$.</td></tr>
<tr><td>B.</td><td>90 prób,</td><td>2.</td><td>dwukrotnie wybiera jedną cyfrę z dziesięciu, czyli zgodnie z regułą mnożenia $10 \cdot 10 = 10$.</td></tr>
</table>

14.31. 46 liczb. *Wskazówka*. Na diagramie przedstawiamy schemat liczby trzycyfrowej, w którym dla każdej pozycji w zapisie dziesiętnym

cyfra setek	cyfra dziesiątek	cyfra jedności

określimy, ile jest możliwości jej uzupełnienia.

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{\ }$ lub $\boxed{1}\boxed{\ }\boxed{2}$

8 możliwości: {0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

8 + **8** **= 16 możliwości**

$\boxed{2}\boxed{1}\boxed{\ }$ lub $\boxed{\ }\boxed{1}\boxed{2}$

8 możliwości: {0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} | 7 możliwości: {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

8 + **7** **= 15 możliwości**

$\boxed{2}\boxed{\ }\boxed{1}$ lub $\boxed{\ }\boxed{2}\boxed{1}$

8 możliwości: {0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} | 7 możliwości: {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

8 + **7** **= 15 możliwości**

Takich liczb trzycyfrowych jest $16 + 15 + 15 = 46$.

14.32. 720 liczb. *Wskazówka*. Na diagramie przedstawiamy schemat liczby trzycyfrowej, w którym dla każdej pozycji w zapisie dziesiętnym

cyfra tysięcy	cyfra setek	cyfra dziesiątek	cyfra jedności

określimy, ile jest możliwości jej uzupełnienia.

$\boxed{5}\boxed{8}\boxed{\ }\boxed{\ }$ lub $\boxed{5}\boxed{\ }\boxed{8}\boxed{\ }$ lub $\boxed{5}\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{8}$

8 możliwości: {0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9} | 8 możliwości: {0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9} | 8 możliwości: {0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

8·8 + **8·8** + **8·8** **= 192 możliwości**

$\boxed{8}\boxed{5}\boxed{\ }\boxed{\ }$ lub $\boxed{\ }\boxed{5}\boxed{8}\boxed{\ }$ lub $\boxed{\ }\boxed{5}\boxed{\ }\boxed{8}$

8 możliwości: {0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9} | 7 możliwości: {1, 4, 5, 6, 7, 8, 9} | 8 możliwości: {0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

8·8 + **7·8** + **7·8** **= 176 możliwości**

$\boxed{8}\boxed{\ }\boxed{5}\boxed{\ }$ lub $\boxed{\ }\boxed{8}\boxed{5}\boxed{\ }$ lub $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{5}\boxed{8}$

8 możliwości: {0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9} | 7 możliwości: {1, 4, 5, 6, 7, 8, 9} | 8 możliwości: {0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

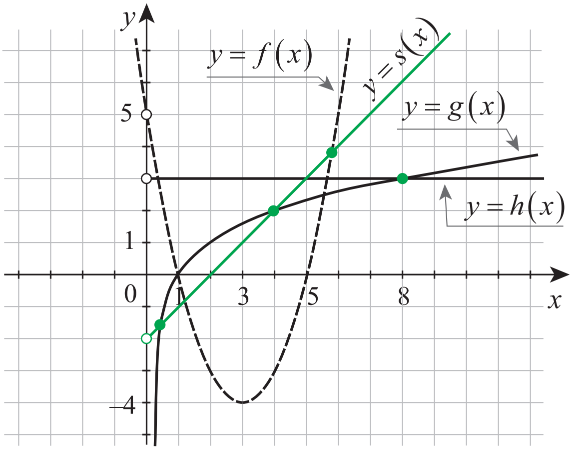
8·8 + **7·8** + **7·8** **= 176 możliwości**

7. (0-2) Wyrażenie wymierne $\frac{8}{2-x}-3$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\frac{ax+b}{cx+d}$. Wyznacz wartości liczbowe współczynników a, b, c, d.

8. (0-2) Rozwiąż nierówność $3x \geq \sqrt{3}x+12\sqrt{3}-6$ i podaj najmniejszą liczbę całkowitą ją spełniającą.

9. (0-2) Rozwiąż równanie $125x^3-25x^2+10x-2=0$.

10. Na rysunku przedstawione są wykresy funkcji f, g, h i s określone dla $x \in \boldsymbol{R}^+$.



10.1. (0-1) *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Największą wartość dla argumentu $x=3$ przyjmuje funkcja:

A. f **B.** g **C.** h **D.** s

10.2. (0-1) *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych*

Dla argumentu $x=6$ najmniejszą wartość ma funkcja:

A. f **B.** g **C.** h **D.** s

10.3. (0-1) *Uzupełnij zdanie. W miejsce .... wpisz odpowiedni przedział liczbowy.*

Nierówność $h(x) \geq s(x)$ jest spełniona dla każdego x należącego do przedziału ....

25.2 $\frac{1}{8}$	Zauważy, że sok w pucharze mającym kształt stożka tworzy stożek podobny do pucharu w skali $\frac{1}{2}$, a stosunek objętości brył podobny jest równy sześcianowi skali podobieństwa.	1
26. **(4 pkt.)**	Odp.: $h=\frac{16}{3}$.	
	1° Zapisze zależność $8a+4h=64$ i określi dziedzinę $a\in(0;8)$.	1
	2° Zapisze pole powierzchni prostopadłościanu uzależnione od jednej zmiennej, czyli $P(a)=2a^2+4a(16-2a)$, skąd $P(a)=-6a^2+64a$.	1
	3° Skomentuje, że $P(a)$ jest funkcją kwadratową określoną dla $a\in(0;8)$. Wykresem funkcji $P(a)$ jest fragment paraboli o ramionach zwróconych ku dołowi, która ma największą wartość dla $a_W=\frac{-64}{-12}=\frac{16}{3}$.	1
	4° Obliczy wysokość h, gdy $a=\frac{16}{3}$.	1

Zestaw II

Nr zad.	Zdający:	Pkt.
1. **D**	Zauważy, że $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}=2^4$ i obliczy wartość wyrażenia.	1
2. **A**	Uzasadni, że $\sqrt{24}+\sqrt{54}=5\sqrt{6}$.	1
3. **A**	Zauważy, że $\log_3\sqrt{6}=\log_3 6^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_3 6$.	1
4. **C**	Zastosuje wzór $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.	1
5. **C**	Zauważy, że $x^2-4x+4=(x-2)^2$.	1
6. **(2 pkt.)**	Odp.: $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=4$.	
	1° Zapisze równanie w postaci $x^2-4x=0$ lub $x^2-1=0$ i rozwiąże jedno z nich.	1
	2° Rozwiąże drugie równanie.	1
7. **C**	Doprowadzi do nierówności $1\le -2$, która jest sprzeczna.	1