1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym

Przypomnijmy

W poprzednich latach nauki poznaliście definicje potęg o wykładnikach wymiernych:

- potęga o wykładniku naturalnym $\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{czynników}}}$, przy czym $a^0 = 1$, gdy $a \neq 0$,
- potęga o wykładniku całkowitym $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ \imath^{-n} = \frac{1}{a^n}}$, gdzie $a \neq 0$ i $n \in \boldsymbol{N}$,
- potęga o wykładniku wymiernym , gdzie $a \in \boldsymbol{R}^+$, $n \in \boldsymbol{N}^+$ i $n > 1$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

W klasie pierwszej poznaliście działania na wyrażeniach wymiernych, znajomość których pozwoli nam udowodnić twierdzenie dotyczące działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Twierdzenie

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b oraz dowolnych wymiernych wykładników x i y prawdziwe są równości:

- $\boldsymbol{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$
- $\boldsymbol{\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}}$
- $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}}$
- $\boldsymbol{a^x : a^y = a^{x-y}}$
- $\boldsymbol{(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x}$

Dowód:

Wprowadzamy oznaczenia $x = \frac{m}{n}$ i $y = \frac{p}{q}$, gdzie $m \in \boldsymbol{Z}$, $p \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}^+$, $q \in \boldsymbol{Z}^+$.

- $\boldsymbol{a^x \cdot a^y} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{np}{nq}} =$

Ułamki $\frac{m}{n}$ i $\frac{p}{q}$ sprowadzamy do wspólnego mianownika nq.

$$= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq} \cdot \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{np} =$$

$$= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq+np} = a^{\frac{1}{nq}\cdot(mq+np)} =$$

$mq \in \boldsymbol{Z}$, $np \in \boldsymbol{Z}$, więc $z^{mq} \cdot x^{np} = x^{mq+np}$.

$$= a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = \boldsymbol{a^{x+y}}, \text{ czyli } \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

ckd.

- $$\left(a^x\right)^y = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} =$$

$$= \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{x\cdot y}, \text{ czyli } \left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}. \qquad \textit{ckd}.$$

- $$(a\cdot b)^x = (a\cdot b)^{\frac{m}{n}} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}\cdot m} = \left[(ab)^{\frac{1}{n}}\right]^m = \left(\sqrt[n]{a\cdot b}\right)^m =$$

$$= \left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}} = a^x\cdot b^x, \text{ czyli}$$

$$(a\cdot b)^x = a^x\cdot b^x. \qquad \textit{ckd}.$$

Analogicznie można przeprowadzić dowód pozostałych dwóch wzorów.

Ćwiczenie 1. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b oraz dowolnych wymiernych wykładników x i y zachodzą równości:

a) $a^x : a^y = a^{x-y}$, **b)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Przykład 1. Przedstaw w postaci potęgi liczby $\frac{1}{9}$ wyrażenie $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}}{\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}}{\sqrt{3}} = \frac{\left[\left(3^3\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= 3^{-\frac{1}{4}} = \left(3^{-1}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(3^{-2}\right)^{\frac{1}{8}} =$$

$$= \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{8}}$$

Przedstawiamy 3^{-2} *w postaci* $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Ćwiczenie 2. Przedstaw w postaci potęgi liczby 8 wyrażenie $\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}$.

Ćwiczenie 3. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\dfrac{(-2)^3\cdot(-2)^2\cdot(-2)^5}{(-2)^3\cdot(-2)^6}$, **b)** $\left[\left(3\frac{1}{3}\right)^{-1} - 5^{-1}\right]^{-1}$, **c)** $\dfrac{\sqrt[3]{25}\cdot 5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}}$, **d)** $\left[\left(64^2\right)^0\right]^{\frac{1}{2}}$.

Ćwiczenie 4. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i oblicz wartość wyrażenia:

a) $\left(2^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)$, **b)** $\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(3-2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$.

Dotychczas obliczaliście potęgi o wykładnikach wymiernych.
Obecnie nauczymy się obliczać potęgi o wykładnikach niewymiernych.

Przykład 2. Wskaż kilka kolejnych przybliżeń dziesiętnych liczby $\sqrt{5}$ i odpowiadający im ciąg przybliżeń liczby $3^{\sqrt{5}}$.

Rozwiązanie

z dokładnością do 1:	$\sqrt{5}\approx 2$,	skąd	$3^{\sqrt{5}}\approx 3^2$,	czyli	$3^{\sqrt{5}}\approx 9$,
z dokładnością do 0,1:	$\sqrt{5}\approx 2,2$,	skąd	$3^{\sqrt{5}}\approx 3^{2,2}$,	czyli	$3^{\sqrt{5}}\approx 11,21$,
z dokładnością do 0,01:	$\sqrt{5}\approx 2,24$,	skąd	$3^{\sqrt{5}}\approx 3^{2,24}$,	czyli	$3^{\sqrt{5}}\approx 11,72$,
z dokładnością do 0,001:	$\sqrt{5}\approx 2,236$,	skąd	$3^{\sqrt{5}}\approx 3^{2,236}$,	czyli	$3^{\sqrt{5}}\approx 11,66$,
z dokładnością do 0,0001:	$\sqrt{5}\approx 2,2361$,	skąd	$3^{\sqrt{5}}\approx 3^{2,2361}$,	czyli	$3^{\sqrt{5}}\approx 11,67$,

. . . .

Z kalkulatora odczytujemy, że $3^{\sqrt{5}}\approx 11,664753321...$.

Wartość potęgi liczby rzeczywistej dodatniej o wykładniku niewymiernym b szacujemy, wykorzystując potęgi o wykładnikach wymiernych, będących kolejnymi przybliżeniami liczby b.
Jeżeli $a > 1$ i b jest dodatnią liczbą niewymierną oraz x i y są dowolnymi liczbami wymiernymi takimi, że $x < b < y$, to $a^x < a^b < a^y$.

Przykład 3. Za pomocą kalkulatora wielofunkcyjnego lub komputera oszacuj liczbę 5^{π}, gdy przybliżenie liczby π jest podane z dokładnością do 0,0001.

Rozwiązanie

Z kalkulatora lub tablic odczytujemy, że $\pi = 3,141592653...$, więc

$$3,1415 < \pi < 3,1416,$$

zatem $5^{3,1415} < 5^{\pi} < 5^{3,1416}$,

skąd $156,96 < 5^{\pi} < 156,99$.

Odp.: $156,96 < 5^{\pi} < 156,99$.

Ćwiczenie 5. Za pomocą kalkulatora wielofunkcyjnego lub komputera oszacuj liczbę $2^{\sqrt{7}}$, gdy przybliżenie liczby $\sqrt{7}$ jest podane z dokładnością do 0,0001.

Potęgi o dodatnich podstawach i niewymiernych wykładnikach mają te same własności, co potęgi o wykładnikach wymiernych (w tym naturalnych i całkowitych).

Prawdziwe jest twierdzenie o działaniach na potęgach o dodatnich podstawach i rzeczywistych wykładnikach.

Twierdzenie

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b oraz dowolnych rzeczywistych wykładników x i y zachodzą równości:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

Przykład 4. Wykonaj działania:

a) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$, **b)** $5^{\sqrt{3}-1}\cdot 5^{1-\sqrt{3}}$, **c)** $\frac{9^{3\sqrt{2}}}{81^{\sqrt{2}-1}}$.

Rozwiązanie

a) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 5^3 = 125,$ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

b) $5^{\sqrt{3}-1}\cdot 5^{1-\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3}-1+1-\sqrt{3}} = 5^0 = 1,$ $a^x\cdot a^y = a^{x+y}$

c) $\frac{9^{3\sqrt{2}}}{81^{\sqrt{2}-1}} = \frac{9^{3\sqrt{2}}}{\left(9^2\right)^{\sqrt{2}-1}} = \frac{9^{3\sqrt{2}}}{9^{2\left(\sqrt{2}-1\right)}} = 9^{3\sqrt{2}-2\left(\sqrt{2}-1\right)} = 9^{\sqrt{2}+2}.$ $81 = 9^2$

Ćwiczenie 6. Wykonaj działania:

a) $\left[\left(\sqrt{5}-1\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$, **b)** $\left(3^{1-\sqrt{3}}\right)^{1+\sqrt{3}}$, **c)** $\left(\frac{3^{3\sqrt{2}}}{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

2. $8^{\frac{1}{4}}$. **3. a)** -2, **b)** 10, **c)** $\frac{1}{5}$, **d)** 1. **4. a)** -3, **b)** 4. **5.** $6{,}2580 < 2^{\sqrt{7}} < 6{,}2584$.

6. a) $6-2\sqrt{5}$, **b)** $\frac{1}{9}$, **c)** 81.

Zadania utrwalające

1.1. Oblicz:

a) $\left(125^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{1}{2}}$, **b)** $\left(16^{-\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left[16^{-0,25}+\left(\sqrt{3}\right)^{-1}\right]$,

c) $16^{-0,75}+0,125^{\frac{4}{3}}+\left(1\frac{61}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$, **d)** $\sqrt{9}\cdot\left[1,5^{-1}+9^{-1,5}\right]-27^{-\frac{2}{3}}$,

e) $\left[\dfrac{125^{\frac{2}{3}}-0,2^{-1}}{0,5^{-2}}\cdot 0,2^{-3}\right]^{\frac{3}{4}}$, **f)** $\sqrt[3]{0,375}\cdot\sqrt[3]{9}+\left(3^{-1}-\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}\right)^{-2}$.

1.2. Wykonaj działanie:

a) $\left(2^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)$, **b)** $\left(m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(m^{\frac{3}{2}}+n^{\frac{1}{2}}\right)$,

c) $\left[\left(3-\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(3+\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2}$, **d)** $\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(3-2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2}$,

e) $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left[a^{\frac{2}{3}}+(ab)^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right]$, **f)** $\left(3^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}\right):\left[3-(3a)^{\frac{1}{2}}+a\right]$.

1.3. Przepisz zadanie do zeszytu i w miejsce $\blacksquare$ wstaw jeden ze znaków: „<”, „=”, „>”, gdy:

a) $81^{10}\ \blacksquare\ 1024^{4}$, **b)** $\left(\dfrac{1}{27\cdot\sqrt[3]{9}}\right)^{-6}\ \blacksquare\ \left(\dfrac{\sqrt[3]{81}}{9\sqrt[4]{27}}\right)^{-12}$,

c) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[4]{125}}{\sqrt[5]{625}}\right)^{40}\ \blacksquare\ 0,2^{-18}$, **d)** $\left(4^{-0,25}-2^{0,5}\right)\cdot\left(4^{-0,25}+\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\ \blacksquare\ \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$.

1.4. Wiedząc, że $a>0$, $b>0$ i $x\in \boldsymbol{R}$ oraz stosując prawa działań na potęgach, przedstaw w prostszej postaci wyrażenie:

a) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}$, **b)** $a^{-3\sqrt{2}}:a^{\sqrt{2}}$, **c)** $3^{x}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$, **d)** $\dfrac{3^{x}}{2^{x}}$.

1.5. Uzasadnij, że:
D

a) $\sqrt[12]{625}=\sqrt[3]{5}$, **b)** $\left[\left(\dfrac{3}{5}\right)^{0}\right]^{\frac{3}{4}}-7\dfrac{1}{2}\cdot 4^{-1,5}-2^{-4}+9^{0,5}=3$.

1.6. Przedstaw w postaci potęgi liczby 2 wyrażenie:

a) $2^{\sqrt{2}}\cdot 2$, **b)** $2^{\sqrt{2}}\cdot 2^{\sqrt{2}}$, **c)** $2^{1-\sqrt{2}}\cdot 2^{1+\sqrt{2}}$, **d)** $\left(\frac{1}{4}\cdot 2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$,

e) $\frac{2^{\sqrt{2}}}{2}$, **f)** $2^{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}$, **g)** $\frac{8^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}}$, **h)** $\left(\frac{16}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$.

1.7. Oblicz:

a) $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$, **b)** $\left[\left(\sqrt{3}\right)^{-\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$, **c)** $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\sqrt{2}}\right]^{1+\sqrt{2}}$,

d) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\sqrt{3}}\right]^{1+\sqrt{3}}$, **e)** $\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{-\sqrt{2}}$, **f)** $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{12}}$.

1.8. Oblicz:

a) $\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$, **b)** $\left(2^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$, **c)** $\left(3^{\sqrt{7}-1}\right)^{\sqrt{7}+1}$.

1.9. D Wykaż, że:

a) $\left(8-2\sqrt{7}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\left(8+2\sqrt{7}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=6^{\sqrt{2}}$, **b)** $\left(12-\sqrt{19}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{3}}\cdot\left(12+\sqrt{19}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{3}}=5^{\sqrt{5}}$,

c) $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{2\sqrt{2}-2}\right]^{2\sqrt{2}+2}-\left[\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{5}+2}\right]^{2\sqrt{5}-4}=-1$.

1.10. Przedstaw w postaci jednej potęgi wyrażenie:

a) $\left(\sqrt{3}\cdot 27^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, **b)** $\left(\frac{32^{\sqrt{2}}\cdot 0,5^{-1}}{8}\right)^{5\sqrt{2}+2}$,

c) $\left[\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{3}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{3}}{36^{\sqrt{2}}}\right]^{1,5+2\sqrt{2}}$, **d)** $\left[\frac{\left(\sqrt[4]{10}\right)^{2}\cdot\left(\sqrt[4]{10}\right)^{3}}{0,01^{\sqrt{5}}}\right]^{1,25-2\sqrt{5}}$.

1.11. Oblicz za pomocą kalkulatora wielofunkcyjnego lub komputera i zapisz wynik z dokładnością do 0,1.

a) π^{π}, **b)** $3^{\sqrt{3}}$, **c)** $2^{\sqrt{2}}$, **d)** $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{5}}$, **e)** $5^{\sqrt{5}}$.

1.12. D Wykaż, że jeśli $m=4^{\sqrt{3}+2}$ i $n=2^{\sqrt{3}+5}$, to $n=8\sqrt{m}$.

Funkcja wykładnicza i jej własności

Jeżeli a jest liczbą dodatnią $(a > 0)$, to każdej liczbie rzeczywistej x ($x \in \boldsymbol{R}$) możemy przyporządkować potęgę a^x. Określamy w ten sposób funkcję, którą nazywamy wykładniczą.

Definicja

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję f określoną wzorem $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą oraz a jest liczbą rzeczywistą dodatnią różną od 1.

$\boldsymbol{f(x) = a^x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{a > 0}$ i $\boldsymbol{a \neq 1}$.

Wykresem funkcji wykładniczej jest krzywa wykładnicza o równaniu $y = a^x$.

Przykłady wzorów funkcji wykładniczych:

$$f(x) = 2^x, \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x, \quad f(x) = 10^x, \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = \pi^x.$$

Przykład 5. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = 2^x$, **b)** $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Rozwiązanie

Sporządzamy tabele wartości funkcji f i g dla wybranych argumentów.

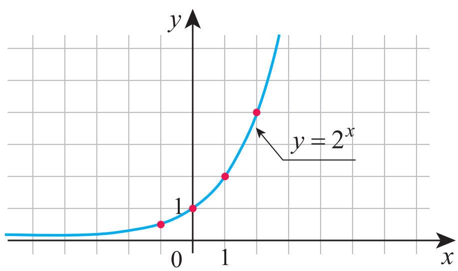
a)

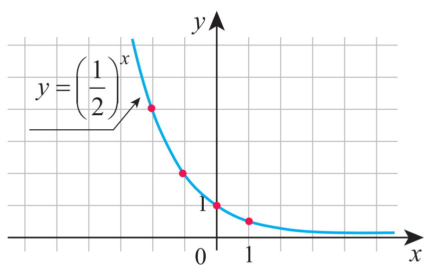
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Szkicujemy wykresy funkcji.





Do naszkicowania wykresu funkcji wykładniczej wystarczą punkty:

np.: $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$.

np.: $(-2, 4)$, $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Ćwiczenie 7. Odczytaj z wykresu funkcji **1** $f(x)=2^x$, **2** $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

a) dziedzinę funkcji, **b)** zbiór wartości funkcji,

c) przedział, w którym funkcja rośnie (maleje),

d) współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią y,

e) miejsca zerowe funkcji, o ile istnieją.

Szkicowanie wykresu funkcji wykładniczej f określonej wzorem $\boldsymbol{f(x)=a^x}$, będziemy rozpoczynać od zaznaczania punktów o współrzędnych $\left(\boldsymbol{-1,\frac{1}{a}}\right)$, $\boldsymbol{(0,1)}$, $\boldsymbol{(1,a)}$.

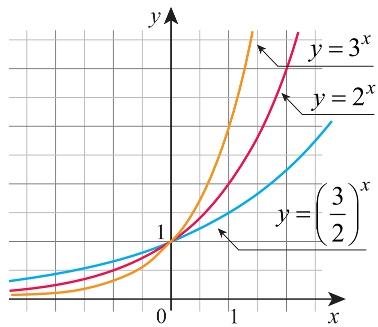
Ćwiczenie 8. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem: **a)** $f(x)=4^x$, **b)** $g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Ćwiczenie 9. Do wykresu funkcji wykładniczej określonej wzorem $f(x)=a^x$ należy punkt A. Podaj wartość a i napisz wzór tej funkcji, gdy:

a) $A=(1,4)$, **b)** $A=(-1,5)$, **c)** $A=(1,10)$, **d)** $A=\left(-1,\frac{1}{6}\right)$.

Ćwiczenie 10. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji wykładniczych f, g i h, gdzie:

$f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, $g(x)=2^x$, $h(x)=3^x$.

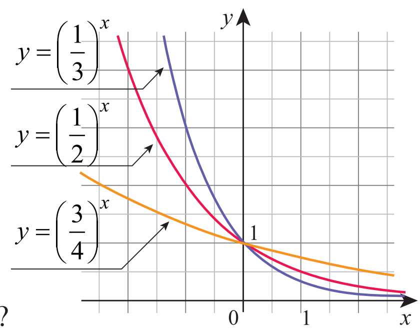


a) Podaj dla każdej z funkcji dziedzinę, zbiór wartości oraz współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji z osią y.

b) Czy funkcje f, g i h są rosnące w przedziale $(-\infty;+\infty)$?

Ćwiczenie 11. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji wykładniczych f, g i h, gdzie:

$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $h(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$.

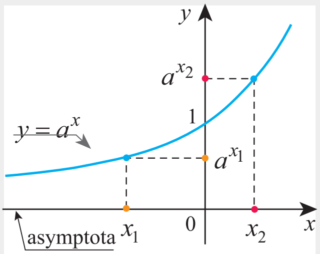


a) Podaj dla każdej z funkcji dziedzinę, zbiór wartości oraz współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji z osią y.

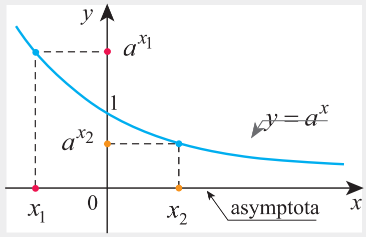
b) Czy funkcje są malejące w przedziale $(-\infty;+\infty)$?

Uwaga

- Zbiorem wartości funkcji wykładniczej f określonej wzorem $\boldsymbol{f(x)=a^x}$ jest zbiór $Y_f = \boldsymbol{R}^+$.
- Funkcja wykładnicza jest:
  - rosnąca, gdy $\boldsymbol{a>1}$,



  - malejąca, gdy $\boldsymbol{0<a<1}$.



Jeżeli $x_1 < x_2$, to

$a^{x_1} < a^{x_2}$ | $a^{x_1} > a^{x_2}$

- Wykres każdej funkcji wykładniczej o równaniu $y=a^x$ leży nad osią x i przechodzi przez punkt $(0,1)$.
- Funkcja wykładnicza nie ma miejsc zerowych.

Ćwiczenie 12. Spośród wzorów funkcji: $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$, $f(x)=\frac{1}{4^x}$, $f(x)=\left(2\sqrt{2}\right)^x$, $f(x)=(0{,}1)^{-x}$, $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$, $f(x)=(\log_2 3)^x$ wybierz te, które określają funkcje malejące.

Przykład 6. Skorzystaj z własności funkcji wykładniczej i uporządkuj rosnąco liczby:

a) $2^{3,2}$, $2^{\frac{22}{7}}$, 2^{π}, **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,(73)}$.

Rozwiązanie

a) Podstawą potęg $2^{3,2}$, $2^{\frac{22}{7}}$, 2^{π} jest liczba 2.

Funkcja określona wzorem $f(x)=2^x$ jest rosnąca, więc najmniejszą spośród liczb jest ta, której wykładnik jest najmniejszy.

$$\frac{22}{7}=3{,}1428\ldots,\quad \pi=3{,}1415\ldots,\quad \text{więc}\quad \pi<\frac{22}{7}<3{,}2.$$

Odp: $2^{\pi}<2^{\frac{22}{7}}<2^{3,2}$.

b) Podstawą potęg $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}, \left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}, \left(\frac{1}{5}\right)^{1,(73)}$ jest liczba $\frac{1}{5}$.

Funkcja określona wzorem $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ jest malejąca, więc najmniejszą spośród potęg liczby $\frac{1}{5}$ jest ta, której wykładnik jest największy.

$\sqrt{3}=1,73205...,\ 1,(73)=1,7373...,$ więc $1,(73)>\sqrt{3}>1,7.$

Odp.: $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,(73)}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}.$

Ćwiczenie 13. Skorzystaj z własności funkcji wykładniczej i uporządkuj malejąco liczby:

a) $3^{1,5},\ 3^{\sqrt{2}},\ 3^{1,4(6)},$ **b)** $(0,5)^{\pi},\ (0,5)^{\frac{10}{3}},\ (0,5)^{\sqrt{9,83}}.$

Uwaga

Jeżeli $\boldsymbol{f(x)=a^x}$ i $x_1\in \boldsymbol{R},\ x_2\in \boldsymbol{R}$ oraz:

- $\boldsymbol{0<a<1}$ *(funkcja wykładnicza jest malejąca)*, to $\boldsymbol{a^{x_1}>a^{x_2}}$, gdy $\boldsymbol{x_1<x_2}$,
- $\boldsymbol{a>1}$ *(funkcja wykładnicza jest rosnąca)*, to $\boldsymbol{a^{x_1}<a^{x_2}}$, gdy $\boldsymbol{x_1<x_2}$.

Przypomnijmy

Jeżeli $a>0$ i $a\neq 1,\ b>0,\ x\in \boldsymbol{R}$, to $\boldsymbol{a^x=b}$**, gdy** $\boldsymbol{\log_a b=x}$.

Przykład 7. Oblicz, jeśli to możliwe, dla jakiego argumentu x funkcja wykładnicza f określona wzorem $f(x)=3^x$ przyjmuje wartość równą: **a)** 27, **b)** 2, **c)** –3.

Rozwiązanie

Obliczenie argumentu x, dla którego funkcja $f(x)=3^x$ przyjmuje określoną wartość, sprowadza się do rozwiązania równania:

a) $f(x)=27$, czyli $3^x=27$, więc $3^x=3^3$, skąd $x=3$.

b) $f(x)=2$, czyli $3^x=2$, więc $x=\log_3 2$. *Korzystamy z definicji logarytmu.*

c) $f(x)=-3$, czyli $3^x=-3$.

Dla każdej liczby rzeczywistej x każda funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie ($a^x>0$), więc równanie $3^x=-3$ nie ma rozwiązania.

Odp.: **a)** $x=3$, **b)** $x=\log_3 2$, **c)** nie istnieje takie x.

Uwaga

Jeżeli $\boldsymbol{y = a^x}$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, $x \in \boldsymbol{R}$, to:

- $\boldsymbol{a^x > 0}$
- $\boldsymbol{x = \log_a y}$.

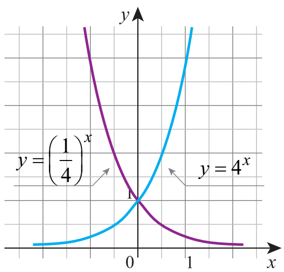
Ćwiczenie 14. Oblicz, jeśli to możliwe, dla jakiego argumentu x funkcja określona wzorem $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartość równą:

a) 32, **b)** $\frac{1}{4}$, **c)** $\frac{1}{1024}$, **d)** 1, **e)** 5, **f)** 0.

Odpowiedzi do ćwiczeń

7. 1 **a)** $D_f = \boldsymbol{R}$, **b)** $Y_f = \boldsymbol{R}^+$, **c)** funkcja *f* rośnie w przedziale $(-\infty; +\infty)$, **d)** $(0,1)$, **e)** funkcja *f* nie ma miejsc zerowych, 2 **a)** $D_g = \boldsymbol{R}$, **b)** $Y_g = \boldsymbol{R}^+$, **c)** funkcja *g* maleje w przedziale $(-\infty; +\infty)$, **d)** $(0,1)$, **e)** funkcja *g* nie ma miejsc zerowych.

8.



9. a) $a = 4$, $f(x) = 4^x$, **b)** $a = \frac{1}{5}$, $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, **c)** $a = 10$, $f(x) = 10^x$, **d)** $a = 6$, $f(x) = 6^x$.

10. a) $D_f = D_g = D_h = \boldsymbol{R}$, $Y_f = Y_g = Y_h = (0; +\infty)$, $(0,1)$, **b)** tak.

11. Dla wszystkich funkcji **a)** $D = \boldsymbol{R}$, $Y = \boldsymbol{R}^+$, $(0,1)$, **b)** tak.

12. $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $f(x) = \frac{1}{4^x}$.

13. a) $3^{1,5} > 3^{1,4(6)} > 3^{\sqrt{2}}$, **b)** $(0,5)^{\sqrt{9,83}} > (0,5)^{\pi} > (0,5)^{\frac{10}{3}}$.

14. a) 5, **b)** –2, **c)** –10, **d)** 0, **e)** $\log_2 5$, **f)** nie istnieje takie x.

Zadania utrwalające

1.13. Do wykresu funkcji wykładniczej *f* należą punkty o podanych współrzędnych x: $(-1, y)$, $(0, y)$, $(1, y)$. Oblicz współrzędną y, zaznacz te punkty na płaszczyźnie kartezjańskiej i naszkicuj wykres funkcji *f*, gdy:

a) $f(x) = 4^x$, **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, **c)** $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, **d)** $f(x) = (0,4)^x$.

1.14. Do wykresu funkcji wykładniczej *f* określonej wzorem $f(x) = a^x$ należy punkt *P*. Podaj wartość a i określ, czy funkcja *f* jest rosnąca czy malejąca, gdy:

a) $P = \left(1, \frac{3}{5}\right)$, **b)** $P = \left(-1, \frac{3}{5}\right)$, **c)** $P = \left(1, 1\frac{2}{3}\right)$, **d)** $P = \left(-1, 1\frac{2}{3}\right)$.

1.15. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g, a następnie z wykresów odczytaj rozwiązanie nierówności:

a) $2^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x$, gdy $f(x)=2^x$ i $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,

b) $3^x \leq 2^x$, gdy $f(x)=3^x$ i $g(x)=2^x$,

c) $4^x > 2^x$, gdy $f(x)=4^x$ i $g(x)=2^x$.

1.16. Uporządkuj rosnąco liczby:

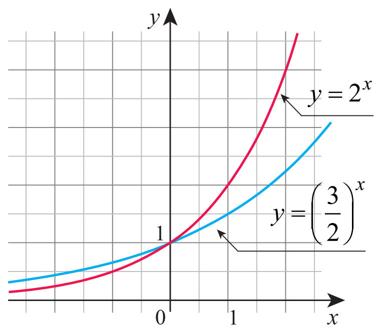
a) $3^{-2\sqrt{2}}$, $3^{-\frac{11}{4}}$, 3^0, $3^{2\pi}$, $\sqrt{3}$,

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{\pi}{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$,

c) 6^{-2}, $6^{-\sqrt{6}}$, $6^{\sqrt{6}}$, 6^2, $6^{-\sqrt{3}}$,

d) $(0{,}2)^{\frac{1}{2}}$, $(0{,}2)^{-\frac{1}{2}}$, $(0{,}2)^{-\sqrt{7}}$, $(0{,}2)^{-4}$.

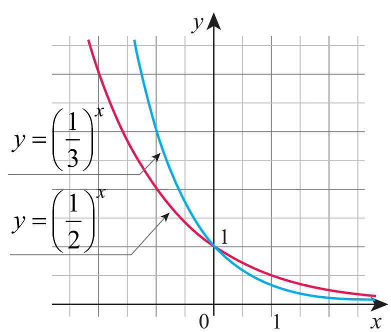
1.17. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ i $g(x)=2^x$.



a) Podaj dla każdej z funkcji dziedzinę, zbiór wartości oraz współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji z osią y.

b) Określ, dla jakich wartości x spełnione są nierówności: **1** $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 2^x$, **2** $\left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 2^x$.

1.18. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ i $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.



a) Podaj dla każdej z funkcji dziedzinę, zbiór wartości oraz współrzędne punktu przecięcia się wykresu z osią y.

b) Określ, dla jakich wartości x spełnione są nierówności: **1** $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^x$, **2** $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

1.19. Oblicz $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, gdy:

a) $f(x)=2^x$, $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=\log_2 5$,

b) $f(x)=3^x$, $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=2\log_3 4$,

c) $f(x)=(0{,}2)^x$, $x_1=-2$, $x_2=\log_5 3$, $x_3=\log_5 \frac{1}{12}$,

d) $f(x)=4^{-x}$, $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\log_2 3$, $x_3=\log_4 7$.

1.20. Oblicz, dla jakiego argumentu x funkcja wykładnicza f przyjmuje wartość równą b, gdy:

a) $f(x)=2^x$ i $b=16$, **b)** $f(x)=3^x$ i $b=\frac{1}{81}$, **c)** $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ i $b=\frac{64}{27}$,

d) $f(x)=\left(\sqrt{5}\right)^x$ i $b=125$, **e)** $f(x)=2^x$ i $b=24$, **f)** $f(x)=3^x$ i $b=405$.

1.21. Rozwiąż równanie:

a) $2^x=2\sqrt{2}$, **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x=64$, **c)** $\left(\sqrt{2}\right)^x=\sqrt[3]{2}$,

d) $10^x=0{,}0001$, **e)** $10^x=\sqrt{0{,}001}$, **f)** $(0{,}1)^x=200$.

1.22. Określ, dla jakich wartości parametru m ma rozwiązanie równanie:

a) $3^x=m$, **b)** $4^x=m-1$, **c)** $5^x=2-m$,

d) $2^x+3=m$, **e)** $\left(\frac{1}{3}\right)^x-5=m$, **f)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x=|m|$.

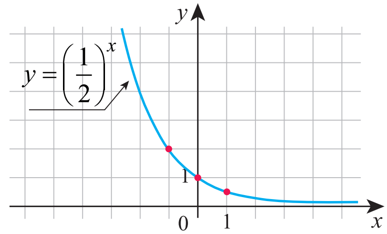
Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej

Przypomnijmy

Wykres funkcji g otrzymujemy z przekształcenia wykresu funkcji f:

- w symetrii względem osi x, gdy
  $$g(x)=-f(x)$$
- w symetrii względem osi y, gdy
  $$g(x)=f(-x)$$
- w przesunięciu równolegle do osi x o p jednostek ($p>0$)
  - w lewo, gdy
    $$g(x)=f(x+p)$$
  - w prawo, gdy
    $$g(x)=f(x-p)$$
- w przesunięciu równolegle do osi y o q jednostek ($q>0$),
  - w górę, gdy
    $$g(x)=f(x)+g$$
  - w dół, gdy
    $$g(x)=f(x)-g$$

Przykład 8. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Naszkicuj wykres funkcji g, gdy:



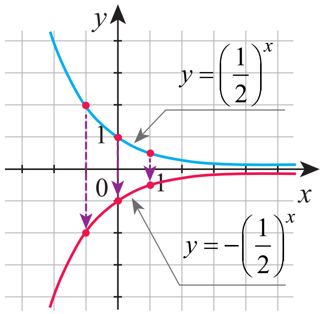
a) $g(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$, **b)** $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$,

c) $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$, **d)** $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$.

Rozwiązanie

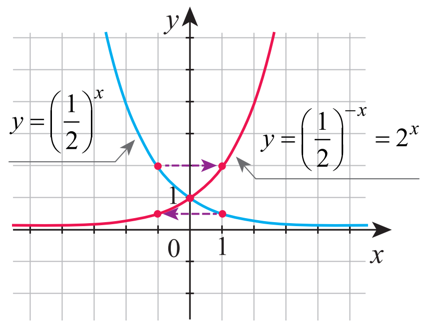
a) Zapis $g(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ oznacza, że $g(x)=-f(x)$.

Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi x.



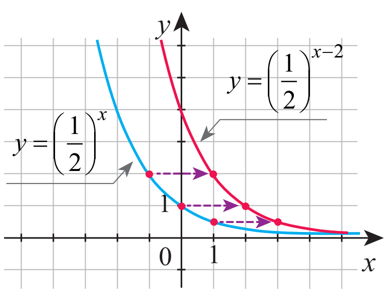
b) Zapis $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ oznacza, że $g(x)=f(-x)$.

Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi y.



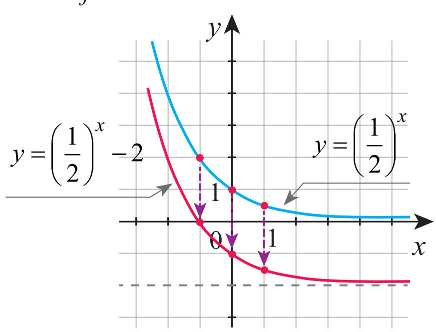
c) Zapis $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ oznacza, że $g(x)=f(x-2)$.

Wykres funkcji g otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji f równolegle do osi x o 2 jednostki w prawo.



d) Zapis $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$ oznacza, że $g(x)=f(x)-2$.

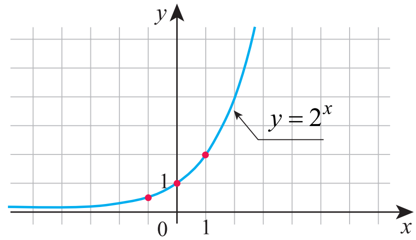
Wykres funkcji g otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji f równolegle do osi y o 2 jednostki w dół.



Ćwiczenie 15. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=2^x$. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji g, gdy:

a) $g(x)=2^{-x}$, **b)** $g(x)=-2^x$,

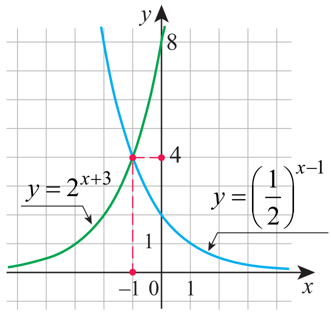
c) $g(x)=2^x+3$, **d)** $g(x)=2^{x+1}$.



Przykład 9. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g określonych wzorami $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ i $g(x)=2^{x+3}$.

Rozwiązanie

Aby obliczyć współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g, należy rozwiązać równanie $f(x)=g(x)$, którego rozwiązaniem jest odcięta x punktu przecięcia się wykresów.



$$f(x)=g(x),\ \text{gdy}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=2^{x+3},\ \text{skąd}$$

$$2^{-(x-1)}=2^{x+3}$$

$$-(x-1)=x+3$$

$$x=-1.$$

$\frac{1}{2}=2^{-1}$

$a^x=a^y$, gdy $x=y$, gdzie $a>0$ i $a\neq 1$

Rzędną y punktu przecięcia obliczamy, podstawiając do wzoru funkcji f lub g w miejsce x liczbę -1. Zatem $y=g(-1)=2^{-1+3}=2^2=4$.

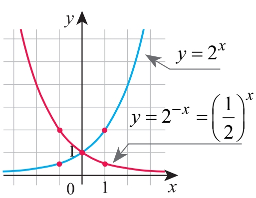
Odp.: Wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie o współrzędnych $(-1,4)$.

Ćwiczenie 16. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g, gdy:

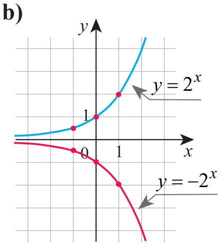
a) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$ i $g(x)=3^{x+1}$, **b)** $f(x)=\left(1\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ i $g(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

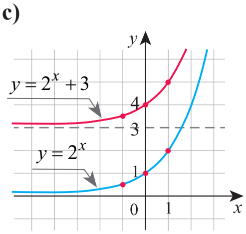
15. a)



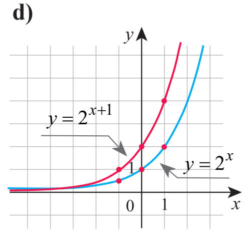
b)



c)



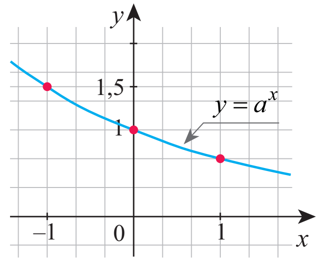
d)



16. a) $(1,9)$, **b)** $\left(1, 2\frac{7}{9}\right)$.

Zadania utrwalające

1.23. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x) = a^x$.



a) Podaj wartość a.

b) Narysuj wykres funkcji g, gdy $g(x) = f(-x)$.

c) Narysuj wykres funkcji h, gdy $h(x) = f(x-2)$.

1.24. Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = (1{,}5)^x$, a następnie narysuj wykres funkcji g i podaj jej zbiór wartości, gdy:

a) $g(x) = -f(x)$, **b)** $g(x) = f(x) - 1$.

1.25. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 4^x$. Narysuj wykres funkcji g i ustal, czy funkcja g jest rosnąca czy malejąca, gdy:

a) $g(x) = -4^x$, **b)** $g(x) = 4^{-x}$, **c)** $g(x) = 4^{x-1}$, **d)** $g(x) = 4^x + 2$.

1.26. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 2^x - 4$.

a) Narysuj wykres funkcji f.

b) Czy funkcja f jest malejąca?

c) Podaj miejsce zerowe funkcji f.

d) Podaj argument x, dla którego $f(x) = -2$.

1.27. Narysuj wykres funkcji f i podaj wartość $f(0)$, gdy:

a) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$, **b)** $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^x}$, **c)** $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$,

d) $f(x) = 8 \cdot \frac{1}{2^x}$, **e)** $f(x) = 16 \cdot 2^x$, **f)** $f(x) = \frac{2}{3} \cdot (1{,}5)^x$.

1.28. Wykres funkcji g otrzymano, przekształcając wykres funkcji f. Opisz to przekształcenie, gdy:

a) $f(x) = (0{,}75)^x$ i $g(x) = \left(1\frac{1}{3}\right)^x$, **b)** $f(x) = \frac{1}{5^x}$ i $g(x) = 5^x$,

c) $f(x) = (2{,}5)^x$ i $g(x) = (0{,}4)^x$, **d)** $f(x) = 49 \cdot 7^x$ i $g(x) = 7^x$,

e) $f(x) = 9^{x-3}$ i $g(x) = 9^{x+3}$, **f)** $f(x) = (0{,}1)^x - 2$ i $g(x) = (0{,}1)^x - 6$.

1.29. Podaj współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji *f* i *g*, gdy:

a) $f(x)=2^x$ i $g(x)=4^x$, **b)** $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ i $g(x)=(0{,}1)^x$,

c) $f(x)=1024^x$ i $g(x)=(0{,}01)^x$, **d)** $f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x$ i $g(x)=\left(\sqrt{3}\right)^x$.

1.30. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji *f* i *g*, gdy:

a) $f(x)=2^{x+4}$ i $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$, **b)** $f(x)=3^{x-3}$ i $g(x)=3\cdot\frac{1}{3^x}$,

c) $f(x)=5^{x-1}$ i $g(x)=125\cdot\frac{1}{5^x}$, **d)** $f(x)=0{,}1\cdot 10^{x+1}$ i $g(x)=0{,}01\cdot\frac{1}{10^x}$.

1.31. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji *f* i *g*, a następnie odczytaj argument *x*, dla którego obie funkcje mają tę samą wartość, gdy:

a) $f(x)=4^x$ i $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$, **b)** $f(x)=9^{x+1}$ i $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$,

c) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}$ i $g(x)=2^{-x}$, **d)** $f(x)=8^{x+2}$ i $g(x)=4^{x+3}$.

1.32. Oblicz argument *x*, dla którego funkcje *f* i *g* przyjmują tę samą wartość, gdy:

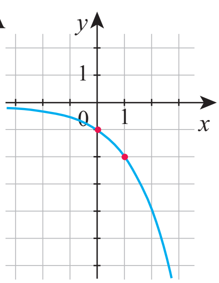
a) $f(x)=4^x$ i $g(x)=8^x$, **b)** $f(x)=9^x$ i $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}$,

c) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ i $g(x)=4^{x+1}$, **d)** $f(x)=16^{x+5}$ i $g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$.

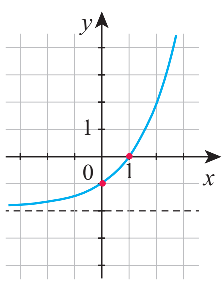
1.33. Do każdego wzoru oznaczonego cyfrą od **1** do **4** dobierz wykres funkcji oznaczony literą A, B, C lub D, który otrzymano, przekształcając wykres funkcji o równaniu $y=2^x$.

1 $y=2^{-x}$, **2** $y=2^{x+1}$, **3** $y=2^x-2$, **4** $y=-2^x$.

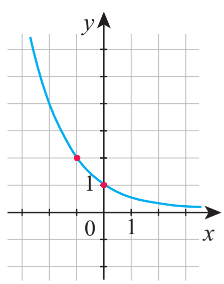
A



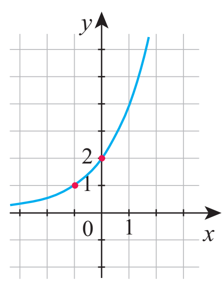
B



C



D



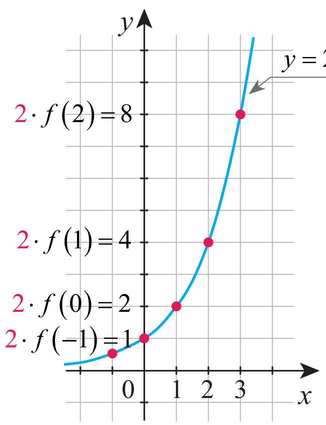
Funkcja wykładnicza w zastosowaniach

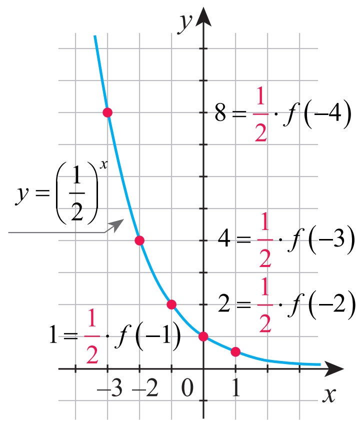
Obserwując określone zjawisko zachodzące w przyrodzie lub społeczeństwie, bada się jego proces zmian w jednostkach czasu (np. co sekundę, co miesiąc, co rok itp.) i szuka się jakiejś prawidłowości, którą można określić wzorem matematycznym.

Badacze zauważyli, iż wiele procesów zmienia się wykładniczo. Z własności funkcji wykładniczej wynika, że jeśli:

$$f(x)=a^x, \text{ to } \frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{a^{x+1}}{a^x}=a, \text{ więc } \boldsymbol{f(x+1)=a\cdot f(x)}.$$

Zatem funkcja wykładnicza ma tę szczególną własność, że na równych odcinkach rośnie (maleje) tyle samo razy.





$$\ldots \xrightarrow{\cdot 2} f(-1) \xrightarrow{\cdot 2} f(0) \xrightarrow{\cdot 2} f(1) \xrightarrow{\cdot 2} f(2) \ldots$$

$$\ldots f(-4) \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} f(-3) \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} f(-2) \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} f(-1) \ldots$$

Uwaga

Zmiany są wykładnicze, gdy w każdej jednostce czasu wartość zmiany rośnie (maleje) tyle samo razy.

Wykładniczy proces zmiany opisuje funkcja określona wzorem:

$$\boldsymbol{y=f(t)=y_0\cdot a^t}$$

t – *czas, jaki upłynął od momentu rozpoczęcia obserwacji, czyli czasu* $t_0=0$

a – *stała wielokrotność zmiany, więc* $a^{t_0}=1$

y_0 – *wartość początkowa obserwowanego zjawiska*

Jeżeli $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$, to $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_0})\cdot\boldsymbol{a^t}$, gdzie $f(t_0)$ jest wartością początkową obserwowanego zjawiska, a t_0 jest momentem rozpoczęcia obserwacji. Obserwując proces zmiany zjawiska w czasie, staramy się ustalić wartość a we wzorze $f(t)=f(t_0)\cdot a^t$.

Uwaga

Jeżeli w ciągu określonej jednostki czasu t nastąpiło:

- **podwojenie wartości początkowej** $f(t_0)$, to $\boldsymbol{a}=\mathbf{2}$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_0})\cdot\mathbf{2}^{\boldsymbol{t}},$$

- **zmniejszenie o połowę wartości początkowej** $f(t_0)$, to $\boldsymbol{a}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_0})\cdot\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{t}},$$

- **zmniejszenie o jedną trzecią wartości początkowej** $f(t_0)$, to $\boldsymbol{a}=1-\frac{1}{3}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_0})\cdot\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{t}},$$

- **zwiększenie o 6% wartości początkowej** $f(t_0)$, to $\boldsymbol{a}=1+\frac{6}{100}=\mathbf{1{,}06}$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_0})\cdot(\mathbf{1{,}06})^{\boldsymbol{t}},$$

- **zmniejszenie o 10% wartości początkowej** $f(t_0)$, to $\boldsymbol{a}=1-\frac{10}{100}=\mathbf{0{,}9}$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_0})\cdot(\mathbf{0{,}9})^{\boldsymbol{t}}.$$

Ćwiczenie 17. Ustal wartość a i napisz wzór określający zmianę w postaci $f(t)=f(t_0)\cdot a^t$, jeżeli w ciągu określonej jednostki czasu t nastąpiło:

a) potrojenie wartości początkowej $f(t_0)$,

b) trzykrotne zmniejszenie wartości początkowej $f(t_0)$,

c) zwiększenie o 75% wartości początkowej $f(t_0)$,

d) zmniejszenie o 3% wartości początkowej $f(t_0)$.

Ćwiczenie 18. Podaj wartość początkową obserwowanego zjawiska i określ, jaka następuje zmiana w jednostce czasu, jeżeli zmianę tę opisuje wzór:

a) $f(t)=20\cdot(0{,}2)^t$, **b)** $f(t)=3000\cdot(1{,}04)^t$,

c) $f(t)=1000\cdot(0{,}92)^t$, **d)** $f(t)=1200\cdot 4^t$.

Przykład 10. Pracownicy dziekanatu zauważyli, że liczba studentów pewnej uczelni w ciągu ostatnich dziesięciu lat powiększała się co roku o 5%. Zakładając, że proces ten w następnych latach nie ulegnie zmianie oraz że obecnie na uczelni studiuje 3000 osób:

a) napisz wzór wyrażający zależność liczby studentów uczelni od liczonego w latach czasu t,

b) oblicz, ilu studentów może być na uczelni za 10 lat.

Rozwiązanie

a) Zauważmy, że liczba studentów uczelni po upływie:

- roku to $3000+0,05\cdot 3000=3000(1+0,05)=$
  $=3000\cdot 1,05,$
- dwóch lat to $3000\cdot 1,05+0,05\cdot 3000\cdot 1,05=3000\cdot 1,05(1+0,05)=$
  $=3000\cdot (1,05)^2.$

Wzór określający liczbę studentów uczelni ma postać $f(t)=3000(1,05)^t$.

b) $f(10)=3000\cdot (1,05)^{10}$

$(1,05)^{10}\approx 1,628895,$ więc $f(10)\approx 4887.$

Odp.: **a)** $f(t)=3000(1,05)^t$, **b)** 4887.

Ćwiczenie 19. Zaobserwowano, że liczba ryb w stawie w ciągu 5 lat powiększała się co roku o 2%. Zakładając, że proces ten w następnych latach nie ulegnie zmianie oraz że obecnie w stawie jest 1200 ryb:

a) napisz wzór wyrażający zależność liczby ryb w stawie od liczonego w latach czasu t,

b) oblicz, ile ryb może być w tym stawie za 5 lat.

Przykład 11. Populacja pewnego małego miasteczka wzrasta wykładniczo. Planiści potrzebują modelu pozwalającego przewidzieć liczbę mieszkańców tego miasteczka w dowolnym momencie w przyszłości. Wiadomo, że w 2016 roku miasteczko liczyło 10 000 mieszkańców, a dwa lata później 10 201.

a) Zbuduj model matematyczny opisujący wzrost liczby mieszkańców miasteczka.

b) Sprawdź poprawność zbudowanego modelu, korzystając z faktu, że w 2020 roku miasteczko liczyło 10 406 mieszkańców.

c) Oblicz, ilu mieszkańców może być w 2026 roku w tym miasteczku.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że $f(t) = y_0 \cdot a^t$ jest wzorem funkcji opisującej zmianę mierzoną po latach t liczby mieszkańców miasteczka od roku 2016.

Zatem $f(t) = 10\,000\,a^t$, gdzie $a > 0$.

a) Obliczamy wartość a z warunku

$a = 2$

$$f(2) = 10\,201, \text{ więc } 10\,000\,a^2 = 10\,201$$

$a = \sqrt{1{,}0201}$

$$a^2 = 1{,}0201.$$

$$a = 1{,}01.$$

b) Sprawdzamy, czy spełniona jest równość $f(4) = 10\,406$.

$(1{,}01)^4 = 1{,}04060401$, więc

$f(4) = 10\,000 \cdot 1{,}04060401 = 10\,406{,}0401$, czyli $f(4) \approx 10\,406$.

c) $f(10) = 10\,000 \cdot (1{,}01)^{10}$, czyli $f(10) \approx 10\,000 \cdot 1{,}10462212539$, więc $f(10) \approx 11\,046$.

Odp.: **a)** $f(t) = 10\,000 \cdot (1{,}01)^t$, **b)** model jest poprawny, **c)** 11 046.

Ćwiczenie 20. Populacja pewnego miasteczka wzrasta wykładniczo. Wiadomo, że w 2013 roku miasteczko liczyło 12 500 mieszkańców, a dwa lata później 13 520.

a) Zbuduj model matematyczny opisujący wzrost liczby mieszkańców miasteczka.

b) Oblicz, ilu mieszkańców może być w 2023 roku w tym miasteczku.

Uwaga

Zmianę wykładniczą zjawiska, o wartości początkowej y_0, która następuje ze stałą wielokrotnością a razy w każdym z okresów r czasu t, można opisać wzorem

$$y = y_0 \cdot a^{\frac{t}{r}} \quad \text{lub} \quad f(t) = f(t_0) \cdot a^{\frac{t}{r}}.$$

Przykłady wzorów stosowanych w różnych dziedzinach wiedzy.

- $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie:
  - $m(t)$ – masa pierwiastka promieniotwórczego po upływie czasu t,
  - T – okres połowicznego rozpadu pierwiastka mierzony w tych samych jednostkach co czas t,
  - m_0 – masa początkowa pierwiastka promieniotwórczego.

- $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$, gdzie:
  - N – liczba osobników populacji po upływie t lat,
  - N_0 – początkowa liczba osobników populacji,
  - k – stała, charakteryzująca daną populację,
  - $e = 2{,}718281828\ldots$.

Przykład 12. Każdy pierwiastek radioaktywny rozpada się z właściwą sobie prędkością. Czas, w którym rozpadnie się połowa atomów, nazywamy okresem połowicznego rozpadu tego pierwiastka. Chemicy ustalili, że pewna odmiana bizmutu $^{214}\mathrm{Bi}$ ma okres połowicznego rozpadu równy 20 minutom. Próbka radioaktywnego bizmutu, którą obserwujesz, waży 1024 gramy.

a) Zbuduj model matematyczny opisujący zmianę ilości radioaktywnego bizmutu w czasie.

b) Po ilu godzinach obserwacji pozostanie tylko 1 gram radioaktywnego bizmutu?

Rozwiązanie

a) Przyjmujemy za jednostkę czasu t godzinę. 20 minut to $\frac{1}{3}$ godziny, więc w ciągu jednej godziny nastąpią 3 rozpady połowiczne atomów bizmutu. Zatem masę m bizmutu po upływie t godzin można określić wzorem

$$m(t) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t : \frac{1}{3}}, \text{ czyli}$$

$m_0 = 1024$, $a = \frac{1}{2}$

$$m(t) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}.$$

b) $m(t) = 1$, czyli

$$1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t} = 1 \quad / : 1024$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3t} = \frac{1}{1024}$$

$1024 = 2^{10}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3t} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$3t = 10$$

$$t = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

Odp.: **a)** $m(t) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, **b)** po 3 godzinach i 20 minutach.

Ćwiczenie 21. Okres połowicznego rozpadu jodu $^{131}\mathrm{J}$ jest równy 8 dniom. Wiedząc, że pewna próbka zawiera 120 g tego jodu, oblicz:

a) masę $^{131}\mathrm{J}$ po upływie 24 dni,

b) liczbę dni, po których masa $^{131}\mathrm{J}$ będzie równa 3,75 g.

W rozważaniach teoretycznych i praktycznych zastosowaniach matematyki wyższej bardzo dużą rolę odgrywają logarytmy, których podstawą jest liczba e*), czyli logarytmy naturalne. Symbolem takiego logarytmu jest **ln**, tzn. $\ln x = \log_e x$.

Przykład 13. Na pustynną wyspę wpuszczono króliki, których liczebność N populacji wzrasta w czasie t miesięcy zgodnie z zależnością $N(t) = 20 \cdot e^{0,1t}$. Oblicz (podaj):

a) liczbę królików wypuszczonych na wyspę,

b) liczbę królików po upływie 20 miesięcy,

c) liczbę miesięcy potrzebną na podwojenie się populacji królików.

W obliczeniach przyjmij $e \approx 2,72$, $e^2 \approx 7,4$, $\ln 2 \approx 0,7$.

Rozwiązanie

a) Z zależności $N(t) = 20 \cdot e^{0,1t}$ odczytujemy, że na wyspę wypuszczono 20 królików.

b) $N(20) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot 20} = 20 \cdot e^2$, skąd

$N(20) \approx 148.$

c) $N(t) = 2 \cdot 20$, więc

$$20 \cdot e^{0,1t} = 40 \quad / : 20$$
$$e^{0,1t} = 2$$
$$0,1t = \log_e 2 \quad / \cdot 10$$
$$t = 10 \cdot \ln 2$$
$$t \approx 10 \cdot 0,7, \text{ skąd } t \approx 7.$$

$e^a = b$, *więc* $a = \log_e b$

$\log_e 2 = \ln 2$

Odp.: **a)** 20 królików, **b)** 148 królików, **c)** 7 miesięcy.

Ćwiczenie 22. Wzrost populacji P (w milionach osób) pewnego kraju od 2010 roku określa zależność $P(t) = 18 \cdot e^{0,05t}$. Oblicz (podaj):

a) liczbę ludności (w milionach) tego kraju w 2010 roku,

b) prognozowaną liczbę ludności (w milionach) tego kraju w 2030 roku.

W obliczeniach przyjmij $e \approx 2,7$.

*) e – stała Nepera, $e = 2,718281828...$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

17. Zauważ, że $t_0 = 0$. **a)** $f(t) = f(t_0)\cdot 3^t$, **b)** $f(t) = f(t_0)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^t$, **c)** $f(t) = f(t_0)\cdot(1{,}75)^t$, **d)** $f(t) = f(t_0)\cdot(0{,}97)^t$. **18. a)** 20 i pięciokrotne zmniejszenie, **b)** 3000 i zwiększenie o 4%, **c)** 1000 i zmniejszenie o 8%, **d)** 1200 i czterokrotne zwiększenie.
19. a) $f(t) = 1200\cdot(1{,}02)^t$, **b)** około 1325 ryb. **20. a)** $f(t) = 12\,500\cdot(1{,}04)^t$, **b)** około 18 503.
21. a) 15 g, **b)** 40 dni. **22. a)** 18 milionów, **b)** 48,6 milionów.

Zadania utrwalające

1.34. Przerysuj do zeszytu poniższą tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednie wielkości.

Nazwa towaru	Obecna cena	Wskaźnik rocznego wzrostu ceny	Cena po t latach
prześcieradło	29 zł	2%	■
samochód	32 000 zł	10%	■
żyrandol	■	■	$270\cdot(1{,}07)^t$

1.35. Przerysuj do zeszytu poniższą tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednie wielkości.

Obecna wielkość populacji	Czas podwojenia populacji	Wartość populacji po t latach
1 000	10 lat	■
1 000 000	25 lat	■
■	■	$250\,000\cdot 2^{0{,}01t}$

1.36. Przerysuj do zeszytu poniższą tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednie wielkości.

Pierwiastek promieniotwórczy	Czas połowicznego rozpadu	Obecna ilość materiału radioaktywnego	Wielkość materiału radioaktywnego po czasie t
ołów: ^{210}Pb	■	■	$10\cdot(0{,}5)^{\frac{t}{22}}$ lat
polon: ^{210}Po	■	■	$100\cdot(0{,}5)^{\frac{t}{140}}$ dni
tal: ^{209}Tl	■	■	$500\cdot(0{,}5)^{0{,}5t}$ minut

1.37. Na początku obserwacji kolonia bakterii liczyła 100 osobników. Bakterie te rozmnażają się przez podział komórki i liczebność ich populacji wzrasta wykładniczo w pierwszych 24 godzinach obserwacji. Wiedząc, że kolonia bakterii podwaja swoją liczebność w ciągu 30 minut, oblicz, ile bakterii będzie liczyła po upływie:

a) godziny, **b)** 5 godzin, **c)** doby.

1.38. Liczba bakterii w pewnej kolonii powiększa się co godzinę o 25%. Kolonia ta o godzinie 15^{00} liczyła 1 000 000 komórek.

a) Napisz wzór opisujący liczbę bakterii kolonii w zależności od czasu t.

b) Oblicz, ile bakterii będzie liczyła kolonia o godzinie 18^{00}.

1.39. Liczebność populacji żuków wzrasta w ciągu miesiąca o 5%. Wiedząc, że na początku było 10 000 żuków, oblicz:

a) liczebność populacji żuków po 3 miesiącach,

b) liczbę miesięcy, po upływie których będzie 11 025 żuków.

1.40. Wartość samochodu maleje w taki sposób, że kiedy ma on t lat, jego wartość W określona jest wzorem $W(t) = 30\,000 \cdot (0{,}9)^t$.

a) Podaj wartość początkową samochodu.

b) O ile procent rocznie maleje cena tego samochodu?

c) Podaj cenę tego samochodu po upływie dwóch lat.

d) Po ilu latach samochód ten będzie wart 19 683 zł?

1.41. Podgrzewany garnek z zupą gospodarz zdejmuje z palnika i odstawia. Temperatura T garnka, wyrażona w stopniach Celsjusza, jest w procesie stygnięcia opisana wzorem $T(t) = 100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{10}}$, wg prawa stygnięcia odkrytego przez I. Newtona gdzie czas t mierzony jest w minutach.

a) Podaj temperaturę garnka zaraz po zdjęciu z palnika.

b) Oblicz temperaturę garnka po upływie 10 minut.

c) Czy po 30 minutach można podnieść garnek gołymi rękoma, nie dotykając uchwytów?

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\left(4^{1-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}+1}$ jest równa:

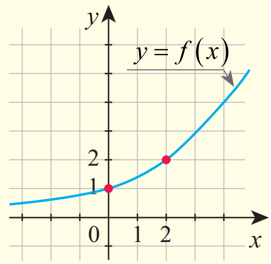
A. –4, **B.** $\frac{1}{4}$, **C.** 4, **D.** 16.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartością wyrażenia $\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\sqrt[3]{54}}\right]^{\sqrt[3]{4}}$ jest liczba:

A. 2, **B.** 4, **C.** 6, **D.** 8.

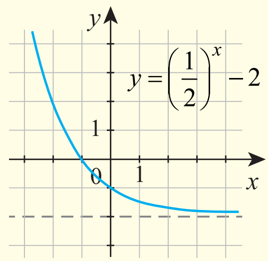
3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej *f* określonej wzorem $f(x)=a^x$.
Wynika z tego, że:

A. $a=\sqrt{2}$, **B.** $a=2$, **C.** $a=\frac{1}{2}$, **D.** $a=\sqrt{3}$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$. Prawdą jest, że:

A. funkcja *f* nie ma miejsca zerowego,

B. $Y_f=\langle -2;+\infty)$,

C. do wykresu funkcji *f* nie należy punkt $(-1,0)$,

D. funkcja *f* jest funkcją malejącą.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Do wykresu funkcji wykładniczej *f* określonej wzorem $f(x)=a^x$ należy punkt $A=\left(-1,\frac{2}{3}\right)$. Punkt *B* należy do tego wykresu, gdy:

A. $B=\left(2,\frac{5}{2}\right)$, **B.** $B=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, **C.** $B=\left(-2,\frac{4}{9}\right)$, **D.** $B=\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Funkcje $f(x)=2^x$ i $g(x)=a$ maja jeden punkt wspólny, gdy:

A. $a=0$, **B.** $a>0$, **C.** $a<0$, **D.** $a\leq 0$.

7. Funkcja wykładnicza f określona jest wzorem $f(x)=a^x$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jeżeli $a=5$, to $f(x)=4$, gdy $x=\log_5 4$.	**P**	**F**
Jeżeli $a=3$, to $f(x)=\frac{1}{27}$, gdy $x=-3$.	**P**	**F**
$a^5>a^4$, gdy $a>1$.	**P**	**F**
$a^3>a^7$, gdy $a>1$.	**P**	**F**

8. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Jeżeli $g(x)=2^{x+3}$ i $f(x)=2^x$, to wykres funkcji g można otrzymać, przesuwając wykres funkcji f wzdłuż osi x o 3 jednostki w prawo.	**P**	**F**
Jeżeli $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x)=2^x$, to wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi y.	**P**	**F**
Jeżeli $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ i $g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, to wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi x.	**P**	**F**

9. Funkcja g określona jest wzorem $g(x)=\frac{64^{\frac{x}{3}}}{4^x}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}$. Funkcja g:

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie spośród 1. albo 2.

A.	**jest funkcją wykładniczą**	ponieważ	**1.**	$g(x)=\frac{64^{\frac{x}{3}}}{4^x}=\frac{\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^x}{4^x}=\left(\frac{\sqrt[3]{64}}{4}\right)^x$, zatem funkcja g nie jest funkcją wykładniczą.
B.	**nie jest funkcją wykładniczą,**		**2.**	$g(x)=\frac{64^{\frac{x}{3}}}{4^x}=\frac{\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^x}{4^x}=\left(\frac{\sqrt[3]{64}}{4}\right)^x$, zatem funkcja g jest funkcją wykładniczą.