1. Liczby rzeczywiste

Liczby rzeczywiste i działania na nich

1.1. Wykonaj działania i określ, czy wynik należy do zbioru liczb wymiernych (***W***) czy zbioru liczb niewymiernych (***NW***).

a) $\dfrac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots}{0,(1)+\sin 330^\circ}$, **b)** $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{-1}+\sqrt{2}\right]\cdot\left[\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}\right)^{-1}\right]$, **c)** $16^{-\log_2\sqrt{2}}$,

d) $\binom{5}{3}:\frac{5}{3}$, **e)** $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)^3$, **f)** $\left(\sqrt{5}-2\right)^3$.

1.2. Oblicz:

a) $\left(\sqrt[3]{5}-2\right)\left(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+4\right)$, **b)** $\left(5^{\frac{1}{2}}+2\right)^3$,

c) $\left(4^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}\right)\left(16^{\frac{1}{3}}+12^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}\right)$, **d)** $\left(3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{2}}\right)^3$.

1.3. Wyznacz liczby x i y, aby spełnione było równanie:

a) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=x+y\sqrt{6}$, **b)** $\left(3-\sqrt{7}\right)^3=x+y\sqrt{7}$, **c)** $\left(\sqrt{5}-2\right)^3-\left(\sqrt{5}+2\right)^3=x+y\sqrt{5}$.

1.4. Wykaż, że:

a) $\left[12\frac{5}{8}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(2\cdot 3^{-1}-9^{-\frac{1}{2}}\right)\right]^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{5}$, **b)** $\left[3^{\frac{1}{2}}-0,25\cdot\left(3^{\frac{3}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}\right)\right]:6^{-0,5}=\sqrt{2}$.

1.5. Sprawdź, czy prawdziwe są równości:

a) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$, **b)** $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$,

c) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{2}+\sqrt{7}$, **d)** $\sqrt{13-2\sqrt{30}}=\sqrt{10}-\sqrt{3}$.

1.6. Sprawdź, czy liczby x i y są liczbami przeciwnymi (czyli $x=-y$), gdy:

a) $x=\dfrac{2}{3-2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{3+2\sqrt{2}}$, $y=2\sqrt{2}-15$, **b)** $x=\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$, $y=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

1.7. Wyznacz odwrotność liczby x, gdy:

a) $x=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$, **b)** $x=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, **c)** $x=2-\sqrt[3]{3}$,

d) $x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}$, **e)** $x=3^{\log_9 2-\log_3 4}$, **f)** $x=\frac{\log_4 49\cdot\log_7 81}{\log_7 729\cdot\log_4 7}$.

1.8. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{\sqrt{\sqrt{13}+\sqrt{12}}}{\sqrt{\sqrt{13}-\sqrt{12}}}$, **b)** $\frac{4}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, **c)** $\frac{12}{\sqrt{15}-\sqrt{6}+\sqrt{35}-\sqrt{14}}$,

d) $\frac{10}{3-\sqrt[3]{7}}$, **e)** $\frac{12}{\sqrt[3]{4}+2}$, **f)** $\frac{2}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}$.

1.9. Porównaj liczby x i y, gdy:

a) $x=\frac{4}{3}\sqrt{2}$, $y=\frac{9}{8}\sqrt{3}$,

b) $x=\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}+3\cdot 2^{-3}\right]^{-2}+3\cdot 8^{\frac{1}{3}}$, $y=\left[3\sqrt[4]{81}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 9^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]:4\frac{23}{55}$,

c) $x=\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}$, $y=\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+2\sqrt[3]{2}$,

d) $x=\frac{\log_6 9\cdot\log_6 16}{\log_6 3\cdot\log_6 32}$, $y=\sqrt{2}-0,41$,

e) $x=\sqrt[4]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y=\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$,

f) $x=\log_4\left(2\sqrt[5]{8}\right)+\log_8\sqrt[3]{0,25}$, $y=\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6(0,57)^{-1}}$.

1.10. Sprawdź, czy liczby x, y, z spełniają warunek $y-x=z-y$, gdy:

a) $x=\sqrt{12}-3$, $y=12^{\frac{1}{2}}+3$, $z=9+\frac{2}{3}\sqrt{27}$,

b) $x=\sin 2\pi$, $y=\cos\frac{\pi}{3}$, $z=\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}$,

c) $x=2\log 5+\log 4$, $y=\log 8+3\log 5$, $z=\log_{\sqrt{3}} 9$.

1.11. Zamień na ułamek zwykły liczbę:

a) 0,(6), **b)** 2,(27), **c)** 0,0(3), **d)** 1,2(7).

1.12. Sprawdź, czy liczby x, y, z spełniają warunek $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}$, gdy:

a) $x=0,(9),\quad y=\cos\frac{\pi}{4},\quad z=\sin\frac{\pi}{6},$

b) $x=\left|81^{0,25}-\sqrt{13}\right|,\quad y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5},\quad z=\left|\frac{1}{\sqrt[3]{27}-13^{\frac{1}{2}}}\right|,$

c) $x=\sqrt{5}-\sqrt{2},\quad y=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}},\quad z=\left(2^{\frac{3}{5}}-\frac{5}{\sqrt[3]{7}}\right)^{0},$

d) $x=\log_{\sqrt{2}}8,\quad y=\frac{3}{\log_{0,1}\frac{1}{10}},\quad z=\frac{\log_5 125}{\sqrt[4]{16}}.$

1.13. Oblicz:

a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^4-10\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2,$

b) $\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right),$

c) $\left[\left(6-2\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(6+20^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,$

d) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-(0,5)^{-1,5}\right]\cdot\left[(0,125)^{-1}+2\sqrt{2}\right],$

e) $\left(9^{\frac{3}{2}}-343^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$

1.14. Oblicz:

a) $\frac{5^{17}-25^8}{5^{16}}-\binom{7}{3}\cdot\frac{1}{5},$

b) $\left[\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}\right]^{\frac{1}{4}}\cdot 4!,$

c) $\sqrt[3]{\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^3-\left(\sqrt{2}-1\right)^3\right]^2-13^2},$

d) $\sqrt[3]{18^3-2^{12}-2^3}.$

1.15. Oblicz:

a) $\frac{2^2-1}{2+1}+\frac{3^2-2^2}{3+2}+\frac{4^2-3^2}{4+3}+\ldots+\frac{2015^2-2014^2}{2015+2014},$

b) $\frac{2^3-1}{2^2+2+1}+\frac{3^3-2^3}{3^2+6+2^2}+\frac{4^3-3^3}{4^2+12+3^2}+\ldots+\frac{2015^3-2014^3}{2015^2+2015\cdot2014+2014^2},$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$,

d) $\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{5^2}\cdot\frac{6^2-1}{6^2}\cdot\frac{7^2-1}{7^2}$.

1.16. Wykaż, że:

a) $\sqrt{6+\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}=1+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}$, **b)** $\sqrt{38-12\sqrt{10}}=2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$,

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$, **d)** $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$,

e) liczba $\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}$ jest liczbą naturalną.

1.17. Wykaż, że $x=2$, gdy:

a) $x\sqrt{11-6\sqrt{2}}=6-2\sqrt{2}$, **b)** $4-2\sqrt{2}=x\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

1.18. Przybliżeniem liczby x z dokładnością do 0,2 jest liczba 3,6, a przybliżeniem liczby y z dokładnością do 0,1 jest liczba 4,2. Oszacuj wartość wyrażenia $3y(x+y)$.

Aby oszacować wartość wyrażenia $3y(x+y)$, postępujemy następująco.

1° Z warunków zadania otrzymujemy nierówności

$3{,}6-0{,}2\le x\le 3{,}6+0{,}2$ i $4{,}2-0{,}1\le y\le 4{,}2+0{,}1$,

$3{,}4\le x\le 3{,}8$ i $4{,}1\le y\le 4{,}3$.

2° Zatem mamy $\begin{cases}7{,}5\le x+y\le 8{,}1\\ 12{,}3\le 3y\le 12{,}9\end{cases}$,

a po pomnożeniu odpowiednio stronami otrzymujemy nierówność

$92{,}25\le 3y(x+y)\le 104{,}49$.

3° Odpowiedź. Wartość wyrażenia $3y(x+y)$ nie jest mniejsza niż 92,25 i nie jest większa niż 104,49.

Postępując analogicznie, oszacuj wartość wyrażenia $x(x+2y)$, gdy przybliżeniem liczby x z dokładnością do 0,1 jest liczba 8,2, a przybliżeniem liczby y z dokładnością do 0,3 jest liczba 6,6.

1.19. Wykaż, że liczba $12\,321^{32}-1$ jest podzielna przez 10.

1.20. Wykaż, że liczba $18!+19!+20!$ dzieli się przez 400.

1.21. Przyporządkuj każdemu równaniu i każdej nierówności odpowiednią ilustrację graficzną rozwiązania.

1. $|x| \leq 3$

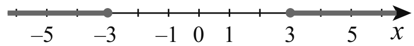
2. $|x| \geq 3$

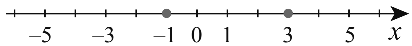
3. $|x-3| = 2$

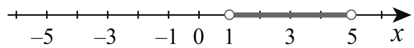
4. $|x+1| > 1$

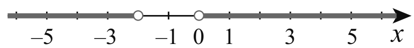
5. $|x-1| = 2$

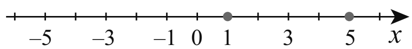
6. $|3-x| < 2$

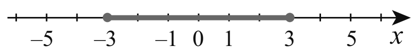
A. 

B. 

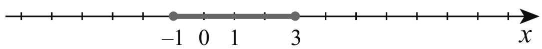
C. 

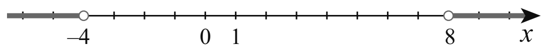
D. 

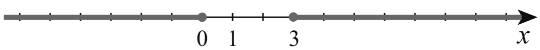
E. 

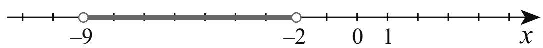
F. 

1.22. Zbiór przedstawiony na rysunku przedstaw w postaci nierówności z wartością bezwzględną.

a) 

b) 

c) 

d) 

1.23. Uwzględnij podane założenie i doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $|x+2|-|x-4|$, gdy $x \in (4; +\infty)$,

b) $|x+2|-|x-4|$, gdy $x \in (-2; 4)$,

c) $|x+2|-|x-4|$, gdy $x \in (-\infty; -2)$,

d) $|x+1|-|1-x|+|x-2|$, gdy $x \in (1; 2)$,

e) $|x+1|+\dfrac{x}{|x|}-|x-1|$, gdy $x < -2$,

f) $\dfrac{|x+2|}{x+2}-\dfrac{|x|}{x}+|x-5|$, gdy $-2 < x < 0$.

1.24. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $|x-2|-|2-x|$,

b) $\left|\dfrac{2}{x-3}\right| \cdot |3-x|$ i $x \neq 3$,

c) $3|x-1|-|3x-3|$,

d) $\left|\dfrac{5x-25}{7}\right| \cdot \left|\dfrac{14}{5-x}\right|$ i $x \neq 5$,

e) $\big||x|-2\big| \cdot \big||x|+2\big| \cdot \left|\dfrac{1}{x^2-4}\right|$, $x \neq -2$ i $x \neq 2$,

f) $\big||x-2|-4\big| \cdot \big||x-2|+4\big| \cdot \left|\dfrac{2}{x^2-4x-12}\right|$, $x \neq -2$ i $x \neq 6$.

1.25. Rozwiąż:

a) $\sqrt{x^2}-3=0$,

b) $2|x+5|=0$,

c) $|4-x| \leq 5$,

d) $|-2-x| > 4$,

e) $6-|2-x| \leq 4$,

f) $2(3|x|-1) \geq 10$,

g) $-2|x+5|-6 \leq 0$,

h) $-\dfrac{1}{2}|x-4|-6 \geq 2$,

i) $2|x+1|-|3x+3|+\sqrt{x^2+2x+1} \leq 1$.

1.26. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej:

a) $10^{\log\frac{9}{4}}$, $\sqrt{9}^{\log_3\frac{10}{\sqrt{4}}}$, $7^{\log_7 2-\frac{1}{3}}$, **b)** $\log_2\left(16\sqrt{8}\right)$, $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_{\sqrt{2}} 2$,

c) $\cos 330°$, $-\sin 405°$, $\sin 1440°$, $-\cos 780°$,

d) $-\operatorname{tg} 225°$, $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 420°}$, $\operatorname{tg} 1440°$, $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 660°}$.

Logarytmy

1.27. Oblicz:

a) $\log\left(2-\left(\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{5}\right)\cdot\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{5}\right)$, **b)** $\log_3 7\cdot\log_5 3\cdot\log_7 5-1$,

c) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d\cdot\log_d e\cdot\log_e a$, **d)** $\log_{\sqrt{6}} 3\cdot\log_3 36$,

e) $\log_{\sqrt{3}} 8\cdot\log_4 81$, **f)** $\log 5\cdot\log 20+(\log 2)^2$,

g) $\log_9 5\cdot\log_{25} 27$, **h)** $\log_5 22-\log_{25} 121-\log_{\sqrt{5}}\sqrt{10}$,

i) $\log_4 5+\log_2 5+\log_{\frac{1}{4}} 62{,}5$, **j)** $\log_2 7-\log_2 63+\log_{\sqrt{2}} 36$.

1.28. Oblicz:

a) $\log_5 25-\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 36+\log_3\sqrt{3}$, **b)** $-\log_2\left(\log_2\sqrt[4]{\sqrt{2}}\right)$,

c) $49^{\log_7 5}+10^{1-\log 5}$, **d)** $9^{\frac{1}{2}\log_3 5+2\log_{27}\sqrt[4]{3}}$,

e) $(\log_a b+\log_b a+2)(\log_a b-\log_{ab} b)\cdot\log_b a-1$, gdzie $a\in\boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$, $b\in\boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$.

1.29. Podaj odpowiednie założenia i zapisz w najprostszej postaci:

a) $\sqrt{1+2^{\frac{\log a}{2\log\sqrt{2}}}-0{,}5\cdot a^{1+\frac{1}{\log_4 a^2}}}-1$, **b)** $\sqrt{\sqrt{\log_b^4 a+\log_a^4 b+2}+2}-\log_b a-\log_a b$,

c) $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}}$, **d)** $\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+...+\log\frac{n+1}{n}$ i $n\in\boldsymbol{N}^+$,

e) $\sqrt{64^{\log_8 13}-36^{\log_6 12}}$.

1.30. Wyraź za pomocą a i b wyrażenie:

a) $\log_{25} 48$, gdy $\log_5 4=a$ i $\log_5 3=b$,

b) $\log_{ab} x$, gdy $\log_a x=2$ i $\log_b x=3$, gdzie $a\in\boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$, $b\in\boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$, $x\in\boldsymbol{R}^+$,

c) $\log_{abc} x$, gdy $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$, $b \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$, $c \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$, $x \in \boldsymbol{R}^+$,

d) $\log_c x$, gdy $\log_a x = p$, $\log_b x = q$, $\log_{abc} x = r$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$, $b \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$, $c \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$, $x \in \boldsymbol{R}^+$.

1.31. Wyraź za pomocą a i b wyrażenie:

a) $\log_{49} 16$, gdy $\log_{14} 28 = a$,

b) $\log_2 360$, gdy $\log_3 20 = a$ i $\log_3 15 = b$.

1.32. Wyraź za pomocą a i b wyrażenie:

a) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{b^4}$, gdy $\log_a b = \frac{3}{4}$ i $a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$, $b \in \boldsymbol{R}^+$,

b) $\log_{12} 8$, gdy $\log_3 2 = a$,

c) $\log_6 16$, gdy $\log_{12} 2 = a$,

d) $\log_8 9$, gdy $\log_{12} 18 = a$.

1.33. Oblicz a^{-b}, jeśli $a = \left(5^{\frac{\log_{100} 3}{\log 3}} \cdot 3^{\frac{\log_{100} 5}{\log 5}} \right)^{2\log_{15} 8}$ oraz $b = \sqrt[4]{36 - 16\sqrt{5}} \cdot \left(4 + 2\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}$.

1.34. Wykaż, że dla $a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$ prawdziwa jest równość:

a) $\log_a \frac{1}{a} = -1$,

b) $\log_a \frac{1}{a} + 2 = \log_a a$,

c) $\log_a (ab) = 1 + \log_a b$,

d) $\log_a 2 + \log_a \frac{1}{2} = 0$.

1.35. Wykaż, że $\dfrac{(0{,}25)^{-1} + \log_{1,2} 1{,}2}{\log\left(2 - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}\right) - 1} = -5$.

1.36. Wykaż, że $(\log_3 5)^{-1} + (\log_7 5)^{-1} < 2$.

1.37. Wykaż, że dla dowolnej liczby $a > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\log^2(\pi a) + \log^2(\pi + a) \geq \frac{2}{\log_{(\pi + a)} 10} - \log_\pi \pi.$$

1.38. Wykaż, że $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$, gdy $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$ i $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$.

1.39. Oblicz:

a) $\log_2(\log 100)$, **b)** $5^{\frac{\log 5}{\log 25}}$, **c)** $\dfrac{\log_3 16}{\log_{\frac{1}{3}} 8}$, **d)** $1000^{\frac{1}{3}-\log\sqrt[3]{3}}$,

e) $\log_3 \operatorname{tg} 30°$, **f)** $\log_4 \sin 135°$, **g)** $\sin 210° + \log_2 \sqrt{2}$,

h) $\dfrac{\cos 100°}{\sin 10°}$, **i)** $\sqrt{a\sqrt{a}} \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot a^{-\frac{3}{4}}$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}^+$.

1.40. Wykaż, że:

a) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_{125} 8 = 3$, **b)** $\dfrac{1}{\log_2 7} + \dfrac{1}{\log_3 7} < 1$, **c)** $\dfrac{1}{\log_{12} 3} - \dfrac{1}{\log_6 3} > \dfrac{1}{2}$,

d) $\dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_4 x} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{10} x} = \log_x 10!$, gdzie $x > 0$ i $x \neq 1$.

Odpowiedzi i wskazówki

Liczby rzeczywiste i działania na nich

1.1. a) $-\frac{27}{14} \in \boldsymbol{W}$, **b)** $\frac{3}{2} \in \boldsymbol{W}$, **c)** $\frac{1}{4} \in \boldsymbol{W}$, **d)** $6 \in \boldsymbol{W}$, **e)** $\left(\frac{11}{4}\sqrt{2} + \frac{25}{8}\right) \in \boldsymbol{NW}$, **f)** $\left(17\sqrt{5} - 38\right) \in \boldsymbol{NW}$.

1.2. a) -3, **b)** $17\sqrt{5} + 38$, **c)** 1, **d)** $3 - 3\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{9} + 6\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{2}$.

1.3. a) $x = 5,\ y = -2$, **b)** $x = 90,\ y = -34$, **c)** $x = -76,\ y = 0$.

1.5. a) Tak, **b)** tak, **c)** tak, **d)** tak.

1.6. a) Tak, **b)** nie.

1.7. a) $\frac{1}{x} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{5}}{11}$, **b)** $\frac{1}{x} = 3\sqrt{2} - 4$, **c)** $\frac{1}{x} = \frac{4 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}{5}$, **d)** $\frac{1}{x} = -\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{16}$, **e)** $\frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$, **f)** $\frac{1}{x} = \frac{3}{4}$.

1.8. a) $\sqrt{13} + 2\sqrt{3}$, **b)** $\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2$, **c)** $\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)$, **d)** $\frac{1}{2} \cdot \left(9 + 3\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}\right)$, **e)** $\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{4} + 4$, **f)** $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}$. *Wskazówka:* **b)** Pogrupuj wyrazy mianownika $1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} = \left(1 - \sqrt{2}\right) + \sqrt{3}$ i pomnóż licznik i mianownik przez $\left(1 - \sqrt{2}\right) - \sqrt{3}$, a następnie przez $\sqrt{2}$, **c)** przedstaw mianownik w postaci $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = \left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$.

1.9. a) $x < y$, **b)** $x > y$, **c)** $x > y$, **d)** $x > y$, **e)** $x = y$, **f)** $x > y$.

Wskazówka: **b)** $x = \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{8}\right]^{-2} + 3 \cdot 2 = \left(-\frac{27}{8} + \frac{3}{8}\right)^{-2} + 6 = \left(-\frac{24}{8}\right)^{-2} + 6 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6 = 6\frac{1}{9}$,

$$y = \left[3\sqrt[4]{3^4} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} \cdot 3^2\right] : \frac{243}{55} = \left[3^{4 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3}}\right] \cdot \frac{55}{243} = 3^2 \cdot \frac{55}{243} = 2\frac{1}{27},$$

c) $x = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{4 \cdot 5} + \sqrt[3]{4^2}}{5 - 4} = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + 2\sqrt[3]{2}$, $y = \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{20} + 2\sqrt[3]{2}$,

d) $x = \frac{\log_6 3^2 \cdot \log_6 2^4}{\log_6 3 \cdot \log_6 2^5} = \frac{8\log_6 3 \cdot \log_6 2}{5\log_6 3 \cdot \log_6 2} = \frac{8}{5} = 1{,}6$, $y = \sqrt{2} - 0{,}41 = 1{,}4142... - 0{,}41 = 1{,}0042...$,

e) $x = \sqrt[4]{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3 - 2} = 1$,

$$y = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5} - 3\right)^2} = \left|\sqrt{5} - 2\right| + \left|\sqrt{5} - 3\right| = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1.$$

1.10. a) Tak, **b)** tak, **c)** tak. *Wskazówka:* Zauważamy, że dany warunek jest równoważny warunkowi $x+z=2y$. **a)** $x+y=\sqrt{12}-3+9+\frac{2}{3}\sqrt{27}=2\sqrt{3}+6+\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}=4\sqrt{3}+6$

i $2y=2\left(12^{\frac{1}{2}}+3\right)=2\left(2\sqrt{3}+3\right)=4\sqrt{3}+6$, więc $x+z=2y$.

b) $x+z=\sin 2\pi+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}=0+1=1$ i $2y=2\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1$, więc $x+z=2y$.

c) $x+z=2\log 5+\log 4+\log_{\sqrt{3}}9=\log\left(5^2\cdot 4\right)+\frac{\log_3 9}{\log_3\sqrt{3}}=2+2:\frac{1}{2}=6$

i $2y=2(\log 8+3\log 5)=2\cdot\log\left(8\cdot 5^3\right)=2\cdot 3=6$, więc $x+z=2y$.

1.11. a) $\frac{2}{3}$, **b)** $\frac{25}{11}$, **c)** $\frac{1}{30}$, **d)** $\frac{23}{18}$. *Wskazówka:* **a)** Liczbę $0,(6)$ przedstawiamy w postaci sumy: $0,(6)=0,6+0,06+0,006+\ldots$. Zauważamy, że składniki sumy $0,6+0,06+0,006+\ldots$ tworzą ciąg geometryczny zbieżny, w którym $a_1=0,6$ i $q=0,1$. Zatem $0,6+0,06+0,006+\ldots=\frac{0,6}{1-0,1}=\frac{2}{3}$,

c) $0,0(3)=0,03+0,003+0,0003+\ldots$, **d)** $1,2(7)=1,2+0,0(7)=1,2+0,07+0,007+0,0007+\ldots$

1.12. a) Tak, **b)** tak, **c)** nie, **d)** tak. *Wskazówka:* Zauważamy, że dany warunek można zastąpić warunkiem $y^2=x\cdot z$. **a)** $y^2=\cos^2\frac{\pi}{4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ i $x\cdot z=0,(9)\cdot\sin\frac{\pi}{6}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, więc $y^2=x\cdot z$.

b) $y^2=\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{5}\right)^2=1^2=1$ i $x\cdot z=\frac{\left|81^{0,25}-\sqrt{13}\right|}{\left|\sqrt[3]{27}-13^{\frac{1}{2}}\right|}=\frac{\left|3-\sqrt{13}\right|}{\left|3-\sqrt{13}\right|}=1$, więc $y^2=x\cdot z$.

c) $y^2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}\right)^2$

i $x\cdot z=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2^{\frac{3}{5}}-\frac{5}{\sqrt[3]{7}}\right)^0=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot 1=\sqrt{5}-\sqrt{2}$, więc $y^2\neq x\cdot z$.

d) $y^2=\left(\frac{3}{\log_{0,1}\frac{1}{10}}\right)^2=\left(\frac{3}{1}\right)^2=9$ i $x\cdot z=\frac{\log_{\sqrt{2}}8\cdot\log_5 125}{\sqrt[4]{16}}=\frac{6\cdot 3}{2}=9$, więc $y^2=x\cdot z$.

1.13. a) -1, **b)** 4, **c)** 4, **d)** 56, **e)** $40\sqrt{5}$. **1.14. a)** -3, **b)** 60, **c)** 3, **d)** 12.

1.15. a) 2014, **b)** 2014, **c)** 9, **d)** $\frac{4}{7}$.

1.16. *Wskazówka:* **a)** Równość $\sqrt{6+\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}=1+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}$ jest prawdziwa, gdy $6+\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{21}=\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2$. Zastosuj wzór $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

c) Przyjmijmy oznaczenie $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=x$ i obie strony równania podnosimy do trzeciej potęgi, czyli

$\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3=x^3$, więc $\sqrt{5}+2-3\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}+3\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}-\sqrt{5}+2=x^3$,

gdzie $\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)\underbrace{\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}_{1}}=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$. Zatem $4-3\underbrace{\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)}_{x}=x^3$,

czyli $4-3x=x^3$.

Równanie $x^3+3x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+4\right)=0 \Leftrightarrow x=1$. Zatem $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$. ***c.n.w.***

e) $54-30\sqrt{3}=27-27\sqrt{3}+27-3\sqrt{3}=3^3-3\cdot3^2\sqrt{3}+3\cdot3\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^3$, więc $54-30\sqrt{3}=\left(3-\sqrt{3}\right)^3$.

Podobnie $54+30\sqrt{3}=\left(3+\sqrt{3}\right)^3$.

1.17. ***Wskazówka:*** **a)** $6-2\sqrt{2}=\sqrt{\left(6-2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{44-24\sqrt{2}}=2\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

1.18. $167{,}67\le x(x+2y)\le 183{,}43$. **1.19.** ***Wskazówka:*** Wystarczy zauważyć, że ostatnią cyfrą liczby $12\,321^{32}-1$ jest cyfra 0. **1.21.** 1 – F, 2 – A, 3 – E, 4 – D, 5 – B, 6 – C.

1.22. **a)** $|x-1|\le 2$, **b)** $|x-2|>6$, **c)** $\left|x-\frac{3}{2}\right|\ge\frac{3}{2}$, **d)** $|x+5{,}5|<3{,}5$.

1.23. **a)** 6, **b)** $2x-2$, **c)** -6, **d)** $4-x$, **e)** -3, **f)** $7-x$.

1.24. **a)** 0, **b)** 2, **c)** 0, **d)** 10, **e)** 1, **f)** 2.

1.25. **a)** $x_1=-3,\ x_2=3$, **b)** $x=-5$, **c)** $x\in\langle-1;9\rangle$, **d)** $x\in(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$, **e)** $x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle4;+\infty)$, **f)** $x\in(-\infty;-2\rangle\cup\langle2;+\infty)$, **g)** $x\in\boldsymbol{R}$, **h)** nie ma rozwiązania, **i)** $x\in\boldsymbol{R}$.

1.26. **a)** $7^{\log_7 2-\frac{1}{3}}$, $10^{\log\frac{9}{4}}$, $\sqrt{9}^{\log_3\frac{10}{\sqrt{4}}}$, **b)** $\log_{\frac{1}{2}}8$, $\log_{\sqrt{2}}2$, $\log_2\left(16\sqrt{8}\right)$, **c)** $-\sin405°$, $-\cos780°$, $\sin1440°$, $\cos330°$, **d)** $-\operatorname{tg}225°$, $\frac{1}{\operatorname{tg}660°}$, $\operatorname{tg}1440°$, $\frac{1}{\operatorname{tg}420°}$.

Wskazówka: **b)** $\log_{\frac{1}{2}}8=\log_{\frac{1}{2}}2^3=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=-3$, $\log_{\sqrt{2}}2=\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^2=2$,

$$\log_2\left(16\sqrt{8}\right)=\log_2\left[2^4\cdot\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\log_2 2^{\frac{11}{2}}=\frac{11}{2}.$$

c) $\cos330°=\cos(360°-30°)=\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\sin405°=-\sin(360°+45°)=-\sin45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sin1440°=\sin(4\cdot360°)=\sin0°=0$, $-\cos780°=-\cos(2\cdot360°+60°)=-\cos60°=-\frac{1}{2}$.

d) $-\operatorname{tg}225°=-\operatorname{tg}(180°+45°)=-1$, $\frac{1}{\operatorname{tg}420°}=\frac{1}{\operatorname{tg}(360°+60°)}=\frac{1}{\operatorname{tg}60°}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\operatorname{tg}1440°=\operatorname{tg}(4\cdot360°)=\operatorname{tg}0°=0$, $\frac{1}{\operatorname{tg}660°}=\frac{1}{\operatorname{tg}(2\cdot360°-60°)}=\frac{1}{-\operatorname{tg}60°}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Logarytmy

1.27. **a)** 0, **b)** 0, **c)** 1, **d)** 4, **e)** 12, **f)** 1, **g)** $\frac{3}{4}$, **h)** -1, **i)** $\frac{1}{2}$, **j)** $4+\log_2 9$.

1.28. **a)** $3\frac{1}{2}$, **b)** 3, **c)** 27, **d)** $5\cdot 3^{\frac{1}{3}}$, **e)** $\log_a b$. *Wskazówka:* Zauważ, że: **c)** $10^{1-\log 5} = 10\cdot 10^{\log\frac{1}{5}}$,

e) $\log_a b + \log_b a + 2 = \log_a b + \frac{1}{\log_a b} + 2 = \frac{(\log_a b+1)^2}{\log_a b}$ oraz $(\log_a b - \log_{ab} b)\cdot \log_b a =$

$= \log_a b\cdot\log_b a - \frac{1}{\log_a(ab)} = \frac{\log_a b}{1+\log_a b}$, więc $\frac{(\log_a b+1)^2}{\log_a b}\cdot\frac{\log_a b}{1+\log_a b} - 1 = \log_a b + 1 - 1.$

1.29. **a)** $a\in \boldsymbol{R}^+$; 0, **b)** $a\in \boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$, $b\in \boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$; 0, **c)** $a\in \boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$, $b\in \boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$; $\log_b a$,

d) $n\in \boldsymbol{N}^+$; $\log(n+1)$, **e)** 5.

Wskazówka: **a)** $2^{\frac{\log a}{2\log\sqrt{2}}} = 2^{\frac{\log a}{\log 2}} = 2^{\log_2 a} = a$ oraz $a^{1+\frac{1}{\log_4 a^2}} = a\cdot a^{\frac{1}{\log_4 a^2}} = a\cdot a^{\log_{a^2} 4} = a\cdot a^{\log_a 2} = a\cdot 2$,

b) $\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2 = \left(\log_b^2 a + \log_a^2 b\right)^2 - 2\cdot\log_b^2 a\cdot\log_a^2 b + 2 = \left(\log_b^2 a + \log_a^2 b\right)^2$,

c) $\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a} = \log_a(\log_b a)$, **e)** $64^{\log_8 13} - 36^{\log_6 12} = 8^{\log_8 13^2} - 6^{\log_6 12^2}$.

1.30. **a)** $\frac{2a+b}{2}$, **b)** $\frac{6}{5}$, **c)** 1, **d)** $\frac{pqr}{pq-rq-pr}$, gdy $x\in \boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$; 0, gdy $x=1$.

Wskazówka: **b), c), d)** Przedstaw $\log_{ab} x$ i $\log_{abc} x$ jako logarytmy o podstawie *x*, gdy $x\in \boldsymbol{R}^+\setminus\{1\}$.

1.31. **a)** $\frac{2a-2}{2-a}$, **b)** $\frac{3a-b+5}{a-b+1}$. **1.32.** **a)** 2, **b)** $\frac{3a}{2a+1}$, **c)** $\frac{4a}{1-a}$, **d)** $\frac{2-4a}{3a-6}$. *Wskazówka:* Zauważ,

że: **c)** $\log_{12} 2 = \frac{\log_3 2}{2\log_3 2+1} = a$, skąd $\log_3 2 = \frac{a}{1-2a}$ oraz $\log_6 16 = \frac{\log_3 2^4}{\log_3(2\cdot 3)} = \frac{4\log_3 2}{\log_3 2+1}$,

d) $\log_2 18 = \frac{\log_9(2\cdot 9)}{\log_9\left(2^2\cdot 3\right)} = \frac{1+\log_9 2}{2\log_9 2+\frac{1}{2}} = a$, skąd $\log_9 2 = \frac{\frac{1}{2}a-1}{1-2a}$ oraz $\log_8 9 = \frac{1}{\log_9 2^3} = \frac{1}{3\log_9 2}$.

1.33. $a^{-b} = 8^{-2} = \frac{1}{64}$. *Wskazówka:* $\sqrt[4]{36-16\sqrt{5}} = \sqrt[4]{\left(4-2\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{\left|4-2\sqrt{5}\right|} = \sqrt{2\sqrt{5}-4}$.

1.36. *Wskazówka:* Zauważ, że $(\log_3 5)^{-1} + (\log_7 5)^{-1} = \log_5 3 + \log_5 7 = \log_5 21$ i $\log_5 5 < \log_5 21 < \log_5 25$.

1.37. *Wskazówka:* Zauważ, że $\frac{2}{\log_{(\pi+a)} 10} = 2\log(\pi+a)$. Nierówność zapisujemy w postaci:

$[\log(\pi a)]^2 + [\log(\pi+a)-1]^2 \geq 0$. Suma kwadratów dwóch liczb jest nieujemna. ***c.n.w.***

1.38. *Wskazówka:* Z definicji logarytmu otrzymujemy: $\log x = \frac{1}{1-\log z}$, $\log y = \frac{1}{1-\log x}$ i $\log z = \frac{1}{1-\log y}$,

skąd $\log x = \frac{\log y-1}{\log y}$ i $\log z = \frac{\log x-1}{\log x}$, więc $\log z = \frac{\frac{\log y-1}{\log y}-1}{\frac{\log y-1}{\log y}} = \frac{1}{1-\log y}$, zatem $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$. ***c.n.w.***

1.39. **a)** 1, **b)** $\sqrt{5}$, **c)** $-\frac{4}{3}$, **d)** $\frac{10}{3}$, **e)** $-\frac{1}{2}$, **f)** $-\frac{1}{4}$, **g)** 0, **h)** -1, **i)** 1.

1.40. *Wskazówka:* **a)** $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 = 3\log_2 5$ i $\log_{125} 8 = \frac{3}{3\log_2 5}$, **b)** $\frac{1}{\log_2 7} = \log_7 2$ i $\frac{1}{\log_3 7} = \log_7 3$.